

Приложение 2.

Физика явлений с отрицательной вязкостью.

Старр В.П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир. 1971. 130 с.

В книге Старра (1971) обсуждается предположение, что в жидких системах определенных типов проявляется турбулентная или виртуальная вязкость, которая систематически оказывается отрицательной. Эффект положительной вязкости состоит в том, чтобы препятствовать относительным движениям в жидкости, в то время как эффект отрицательной вязкости – в поддержании разности скоростей или увеличении её, если это допускают все остальные факторы. Данное явление строго установлено из наблюдений. Известно как оно происходит, но неизвестно – почему.

Свойство жидкости оказывать сопротивление движению со сдвигом (течение, у которого поперечный градиент скорости отличен от нуля) известно из многочисленных данных наблюдений. Поэтому довольно трудно воспринять идею о возможности обратного эффекта

Согласно предположению, высказанному ещё Ньютоном, в обычных жидкостях при наличии сдвига в потоке, как показано на рис. П2-1, напряжение трения, или сила трения, действующая на единичную площадку в касательном направлении, пропорциональна величине сдвига. Отсюда приходим к понятию коэффициента вязкости, как коэффициента пропорциональности, связывающего напряжение τ со сдвигом, так что

$$\tau = \mu \partial u / \partial y \quad (\text{П2.1})$$

где u - составляющая скорости жидкости в направлении оси x . Линейная зависимость напряжений от величины сдвига отражена в динамических уравнениях Навье - Стокса, соответствующих общему случаю трехмерного течения жидкости.

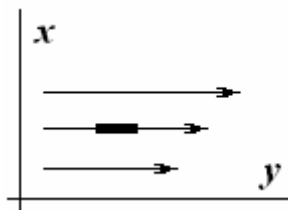


Рис. П2-1. В декартовой системе координат (x, y, z) простейшее течение со сдвигом изображено стрелками. Ради простоты показана только одна компонента движения по направлению оси x , которая не зависит от y и z . Жирным отрезком прямой, которым помечена средняя стрелка, обозначена единичная площадка, параллельная плоскости xz .

По определению знаки τ и μ , выбирают таким образом, чтобы положительные значения этих величин соответствовали свойству жидкости оказывать сопротивление сдвигу, схематически изображенному на нашем рисунке, т. е. соответствовали стремлению к уменьшению сдвига со временем в отсутствие каких-либо поддерживающих его сил. Остановимся на причинах того, почему физические соображения заставляют ожидать именно такого эффекта.

Обычно предполагается, что эффект вязкости принадлежит к так называемым *молекулярным* явлениям. Обсудим случай, когда интересующая нас среда - газ. Выше мы условились, что вектор скорости параллелен оси x . Это следует понимать в смысле статистического среднего. В действительности на молекулярном уровне отдельные молекулы, вообще говоря, обладают также компонентой скорости, параллельной оси y , и, следовательно, пересекают единичную площадку, по отношению к которой определяется величина напряжения. Переноса массы через рассматриваемую площадку в среднем не происходит. Отсюда следует, что суммарная масса молекул, пересекающих единичную площадку снизу вверх в данный момент времени, равна по величине массе молекул, движущихся сверху вниз. Согласно ньютоновской механике, напряжение τ определяется величиной потока через единичную площадку составляющей количества движения

(импульса) по оси x . Поэтому движущиеся вверх молекулы при пересечении площадки должны приносить с собой дефицит x -компоненты импульса, тогда как молекулы, движущиеся вниз, уносят с собой его избыток. В результате суммарный перенос импульса происходит сверху вниз, что соответствует положительной величине τ .

Используя понятие средней длины свободного пробега из статистической механики, можно рассчитать необходимую разность импульсов, переносимых молекулами снизу вверх и сверху вниз, причем результат вычислений нетрудно предвидеть. Эта разность, кроме того, не может появиться за счет хаотических компонент молекулярного движения. Она возникает только за счет компоненты, испытывающей систематический сдвиг. Это становится понятным, если учесть, что молекулы, пересекающие площадку, первоначально находились по обе стороны от нее на некоторых расстояниях выше или ниже площадки.

Как известно, Максвелл впервые рассчитал молекулярную вязкость газов, опираясь на указанную концепцию, он получил удовлетворительное согласие вычисленных значений с результатами измерений.

Выскажем несколько общих замечаний, которые будут полезны в дальнейшем.

Во-первых, полученный Максвеллом результат имеет статистический характер. Это означает, что в среднем каждая молекула, пересекающая площадку сверху вниз, обладает большим по величине импульсом, чем молекула, пересекающая площадку снизу вверх. Другими словами, для всех молекул, которые пересекают площадку, составляющие импульса по оси x и y имеют отрицательную корреляцию, причем измерения осуществляются в момент пересечения площадки.

Во-вторых, молекулы, пересекающие площадку, обладают также в смысле статистического среднего составляющей импульса по оси x , соответствующей их первоначальному положению ниже или выше площадки, задаваемому сдвигом.

И, наконец, поскольку размеры молекул очень малы, для макроскопического описания напряжения связывают с дифференциальными характеристиками среднего течения в некоторой точке пространства. Поэтому дифференциальное выражение для τ можно записать в виде (2.1); а для того чтобы получить величину результирующей сил вязкости, действующих на элемент жидкости, его надо продифференцировать по пространственным координатам.

1. Понятие турбулентной вязкости. Наблюдая за различными течениями вязкой жидкости, нам редко (если это вообще когда-либо возможно) удастся проследить за всеми деталями таких течений. Так, при измерении коэффициента молекулярной вязкости μ каким-либо вискозиметром мы не имеем дела непосредственно с молекулярными движениями. При исследовании движений в атмосфере и океане скорости почти всегда измеряются приборами, которые осредняют не только молекулярные движения, но также неоднородности движения больших пространственных и временных масштабов. Проследить за всеми движениями, включая и мелкие нерегулярности почти до масштабов молекулярных движений, в обычных течениях фактически невозможно.

Когда делаются попытки проанализировать такие сглаженные осреднением течения, то вскоре обнаруживается, что в подавляющем большинстве случаев невозможно согласовать операцию осреднения с использованием коэффициента молекулярной вязкости μ . Использование его для описания некоторых течений приводит к абсурду. Для описания других течений он, по-видимому, слишком мал по порядку величины. Если при определении μ мы допускали, что перенос импульса через площадку осуществляется только посредством молекулярного обмена между частями, находящимися по обе стороны рассматриваемого сечения, то теперь естественно предположить, что существует возможность обмена через единичную площадку макроскопическими

элементарными массами. В результате такого усиленного обмена массами поведение макроскопических x - и y -компонент скорости u и v приобретает сложный и запутанный характер. Перенос импульса, осуществляемый макроскопическими массами, обычно значительно превосходит перенос импульса молекулярными движениями, хотя последний по-прежнему имеет место. Этим и объясняется неэффективность использования коэффициента μ без введения дополнительных условий.

В случаях, которые мы только что обсуждали, обычно говорят, что течение характеризуется наличием *турбулентности* и в нем происходит турбулентный перенос импульса. Если этот турбулентный перенос импульса воспроизводит эффект молекулярной вязкости (т. е. происходит в том же направлении), то говорят о наличии *турбулентной вязкости*. Иногда ее называют *виртуальной* или *вихревой вязкостью*, и тогда можно ввести коэффициент турбулентной вязкости η , но при этом сразу возникают дополнительные вопросы, которые необходимо обсудить.

Предположим, что по аналогии с (П2.1) мы записываем соотношение

$$\tau_R = \eta \frac{\partial [u]}{\partial y} \quad (\text{П2.2})$$

$$[u] = \frac{1}{L} \int_{x_1 - \frac{L}{2}}^{x_1 + \frac{L}{2}} u dx$$

где L — длина выбранного отрезка, параллельного оси x , с серединой в данной точке $x=x_x$. Напряжение τ_R в (П2.2) является турбулентным напряжением, или, как его часто называют, напряжением Рейнольдса.

Исследователи, занимавшиеся изучением турбулентности, затратили большие усилия, чтобы найти физически обоснованный вывод соотношения (П2.2), подобно тому как Максвелл и другие успешно сделали это для (П2.1). Одно из главных направлений исследований заключалось в том, чтобы элементу массы, охваченному вихревым движением, поставить в соответствие *путь перемешивания*, в некотором смысле аналогичный средней длине свободного пробега молекул, и затем связать эту величину с коэффициентом η . Конечно, это соответствие никогда не может быть точным, так как в отличие от молекулы, жидкая частица не является самостоятельным образованием. Точно так же путь перемешивания нельзя рассматривать буквально как среднюю длину свободного пробега жидкой частицы хотя бы потому, что этот пробег не является свободным. Жидкая частица постоянно взаимодействует с окружающей средой, и исследование турбулентной вязкости в отличие от молекулярной должно основываться на законах механики сплошных сред. Чтобы согласовать теорию с экспериментом или данными наблюдений, основой исследования обычно становится полуэмпирический метод.

Вообще говоря, попытки получить физически обоснованный вывод соотношения (П2.2) так и не имели существенного успеха даже в тех случаях, когда полуэмпирические методы описания некоторых турбулентных течений нашли успешное применение в инженерных и других прикладных задачах. Конечно, если τ_R , а также $[u]$ измеряются непосредственно, всегда можно приписать величине η такое значение, которое удовлетворяет рассматриваемым данным наблюдений. Однако соотношение (П2.2) тем и полезно, что η можно определить заранее и затем рассчитывать τ_R , зная величину одной только средней скорости течения. Можно отметить, что попытки вывести соотношение (П2.2) из общих принципов вновь ставили своей целью связать τ_R с дифференциальными характеристиками осредненного движения в одной точке пространства так же, как это было сделано в молекулярном случае.

2. Появление отрицательной вязкости. Предположим, что мы измеряем реальные значения величин τ_R и $[u]$, входящих в соотношение (П2.2). Для определенных видов

течений, как в лабораторных, так и в естественных условиях, оказывается, что значения η , необходимые для выполнения равенства (2.2), систематически получаются отрицательными, что соответствует мнимому значению пути перемешивания. Это является результатом того, что турбулентный перенос импульса τ_R в таких течениях направлен из областей с меньшим значением скорости среднего потока в области с большим ее значением, причем влияние такого турбулентного переноса импульса на среднее течение прямо противоположно эффекту фрикционного торможения. В этих случаях значения τ_R много больше значений величины τ , заданной равенством (П2.1), если вместо u , используется $[u]$. Ясно, что такое поведение жидкости представляет собой новое физическое явление и не может рассматриваться по аналогии с молекулярной вязкостью, следствием которой никогда не бывает столь резко аномальный эффект.

Из общих представлений и некоторых соображений, о которых будет сказано ниже, следует, что положительная турбулентная вязкость приводит к диссипации кинетической энергии среднего течения, причем эта энергия переходит в нерегулярные движения, а от них в энергию молекулярных движений и в конечном итоге преобразуется в тепло. При наличии отрицательной турбулентной вязкости последовательность событий должна быть обратной: среднее течение получает кинетическую энергию от нерегулярных движений, а энергия среднего течения остается в определенных пределах за счет диссипативного влияния других процессов. Нерегулярные движения либо постепенно ослабевают, либо же поддерживаются некоторыми процессами, например систематическим преобразованием тепла в кинетическую энергию в рамках отдельных возмущений. В последнем случае, если турбулентный режим является установившимся, система должна обеспечиваться необходимым количеством тепла.

Реальными течениями, в которых имеет место эффект отрицательной вязкости, являются дифференциальное вращение солнечной фотосферы, дифференциальное вращение земной атмосферы, среднее состояние Гольфстрима вблизи американского побережья и течения в некоторых лабораторных экспериментах. Кроме того, как следует, по крайней мере, из некоторых подсчетов, такое явление обнаруживается и в среднем дифференциальном вращении дисков спиральных галактик. Вероятно, многие другие течения, еще не изучавшиеся с излагаемой точки зрения, будут дополнительно включены в этот список в недалеком будущем. Следует отметить также, что к настоящему времени построен ряд теоретических моделей, с помощью которых в той или иной степени удавалось воспроизвести течения реальных жидких систем. В указанных моделях упомянутый здесь турбулентный эффект ничем заранее не задается и является следствием самих гидродинамических или магнитогидродинамических уравнений.

3. Модель. Идея отрицательной турбулентной вязкости возникла из вычисления напряжений Рейнольдса по данным наблюдений, касающихся главным образом земной атмосферы. Как и в других аналогичных примерах, когда новые данные приводят к существенному отклонению от привычного мышления, переход к научному мышлению на основе физических концепций должен основываться на наблюдаемом явлении настолько непосредственно, насколько это возможно, чтобы быть убедительным и внушать доверие. Ввиду того, что создание действительно адекватных теоретических моделей упоминаемых выше течений, является одной из наиболее трудных задач прикладной математики, когда-либо попадавших в руки теоретиков от гидродинамики, наблюдательная основа нашего изучения является особенно ценной. Однако надо отдать справедливость исследователям и сразу же отметить, что прогресс, которого они достигли в моделировании атмосферы посредством вычислений на электронных машинах, является в настоящее время действительно потрясающим. Это не значит, что надежное долгосрочное предсказание погоды уже близко, поскольку имеются дополнительные нерешенные

проблемы, но для тех, кто полностью сознает всю сложность рассматриваемых систем, такое суждение едва ли покажется нелепым.

Однако еще до того, как мы попытаемся мысленно охватить данные наблюдений, желательно рассмотреть некоторый теоретический материал, непосредственно относящийся к гидродинамическим законам. Из методических соображений мы сделаем это на примере модели, упрощенной насколько возможно. Ее недостатки совершенно очевидны, но все-таки она более близко подводит нас к самой сути явления и необходимой методологии.

4. Решение системы уравнений горизонтального движения. Мы предполагаем, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой, с постоянной плотностью, чисто горизонтальным движением в плоскости xu и без молекулярной вязкости. Слой имеет малую толщину по вертикали и ограничен двумя ровными стенками при $y = \pm y_0$, где y_0 постоянно, так что образуется канал постоянного сечения. Чтобы иметь дело с замкнутой системой, зададим в качестве искусственного условия, что движение повторяется в направлении x с периодом L . Это никоим образом не мешает использованию декартовых координат и не меняет формы гидродинамических уравнений.

Если мы допустим, что давление является единственной реально действующей силой, то динамические уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{П2.3, П2.4})$$

где u и v – скорости частиц, p – давление, ρ – плотность, t – время, а

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{П2.5})$$

есть скорость изменения со временем величины, переносимой вместе с данной частицей, каково бы ни было ее движение. Соответственно левые части (П2.3) и (П2.4) представляют собою массу единичного объема ρ , умноженную на компоненты ускорения в инерциальной системе координат, и потому равны полным силам давления на единицу объема. Кинематическое условие (П2.5) – соотношение Эйлера, связывающее индивидуальную скорость изменения свойства частицы с пространственными производными и скоростью изменения со временем свойства в фиксированной точке пространства.

Закон сохранения массы в нашем случае равносильен сохранению объема и потому имеет форму

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{П2.6})$$

что представляет собой уравнение неразрывности для нашей задачи. Следует отметить, что уравнения (П3), (П4) и (П6) содержат три независимые переменные — x , y и t . Эти три уравнения образуют замкнутую систему для трех зависимых переменных или неизвестных u , v и p . Каждое из последних в общем случае должно быть выражено через x , y и t . Единственное решение, не содержащее произвольных функций (появляющихся в результате интегрирования), может быть, разумеется, обеспечено выполнением граничных и начальных условий.

Имеется ряд методов решения системы (3), (4) и (6). Сведем систему к единственному уравнению с одним неизвестным. Давление может быть исключено из (3) и (4) перекрестным дифференцированием и приравниванием получившихся смешанных производных. При использовании (5) и (6) легко показать, что система сводится к двум уравнениям с двумя неизвестными u и v , а именно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{П2.7})$$

Первое из этих уравнений содержит величину $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, т. е. вихрь, который является скоростью вращения частицы в окрестности соответствующей точки. Это уравнение выражает тот факт, что индивидуальные частицы при движении сохраняют свой вихрь; действующие в данном случае на частицу силы (т. е. силы давления) не способны создать отличный от нуля момент. Этот факт указывает на необходимость приписать каждой частице тем или иным способом в качестве начального условия желаемое значение вихря, т. е. выбрать движение жидкости в начальный момент. Уравнение неразрывности все еще должно остаться в системе (7), так как, хотя оно и было использовано при выводе первого уравнения, или *уравнения вихря*, это не привело к исключению дополнительного неизвестного.

Ни одно из оставшихся неизвестных нельзя исключить непосредственно из (П2.7). Поэтому мы далее введем *функцию тока* ψ , использование которой заменяет уравнение неразрывности, так что наша система будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$v = +\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{П2.8})$$

Теперь в системе (8) три уравнения и три неизвестных u , v и ψ . Большим преимуществом этой процедуры является то, что u и v можно тотчас же исключить из уравнения вихря и получить одно уравнение для определения ψ . После раскрытия полной производной мы получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{П2.9})$$

Это уравнение двумерного движения невязкой жидкости с постоянной плотностью по отношению к инерциальной системе координат.

- Уравнение имеет третий порядок и нелинейно. Общее решение уравнения не может быть выписано.
- Второй и третий члены его образуют якобиан, или функциональный детерминант, для ψ и вихря по отношению к x и y , обращение которого в нуль означало бы совпадение изолиний ψ (т.е. линий тока) и изолиний вихря. Такое условие необходимо для стационарности потока. Если поток нестационарен, то якобиан дает скорость изменения вихря в фиксированной точке.
- Если бы мы могли получить общее решение уравнения (П2.9), то оно содержало бы три независимые произвольные функции, поскольку уравнение имеет третий порядок. Мы уже отмечали, что одна из произвольных функций требуется для удовлетворения начальным условиям; остающиеся нужны для фиксирования граничных условий.

Функция тока ψ и вихрь не независимы. Если задана функция ψ , то вихрь является ее *лапласианом* $\partial^2 \psi/\partial x^2 + \partial^2 \psi/\partial y^2$ и потому получается дифференцированием. При заданном вихре функция тока может быть получена обращением лапласиана, т. е. решением *уравнения Пуассона*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F(x, y) \quad (\text{П2.10})$$

при заданных граничных условиях. Функция $F(x, y)$ описывает пространственное распределение вихря. Так как уравнение (9.10) нелинейно, можно явно выписать его общее решение с помощью функции Грина в виде

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint F' \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \times dx' dy' + \varphi_1(x+iy) + \varphi_2(x-iy), \quad (\text{П2.11})$$

где штрих означает данные в точке x', y' , а i - мнимая единица. Функции φ_1 и φ_2 произвольны, и в принципе с их помощью можно удовлетворить граничным условиям. Интеграл распространяется на всю рассматриваемую область.

Решение уравнения (9) для нашей задачи сводится к получению функции $\psi = \psi(x, y, t)$, соответствующей данному начальному потоку в момент $t = 0$, когда $\psi = \psi_0(x, y)$, и удовлетворяющей граничным условиям, т. е. $\psi = \psi_a$ при $y=y_1$ и $\psi = \psi_b$ при $y = -y_1$, где ψ_a и ψ_b - постоянные в области $t \geq 0$.

Так как ψ_0 описывает начальный вихрь, мы можем вычислить в (9) якобиан при $t=0$. Это позволяет найти распределение вихря в момент $t = \Delta t$ линейной экстраполяцией, если Δt достаточно мало. Это новое распределение вихря можно подставить в правую часть (10), так что, согласно (11), мы можем получить новое, слегка измененное распределение ψ . Новое распределение ψ мы можем опять подставить в (2.9), и процесс повторяется для второго интервала времени Δt и т. д. для последовательных временных шагов. Чем меньше шаг по времени и чем больше число итераций для получения данного, зависящего от времени решения, тем больше точность результата.

На основе конечно-разностной схемы легко показать, что уравнение (10) может быть аппроксимировано соотношением

$$\psi_a + \psi_b + \psi_c + \psi_d - 4\psi_0 = F_0(x, y). \quad (\text{П2.12})$$

Такое же уравнение можно получить для каждой внутренней точки. При этом число неизвестных значений ψ будет равно числу уравнений, так как значения в точках стенки задаются граничными условиями. Задача сводится к решению замкнутой системы алгебраических уравнений типа (П2.12). Это можно сделать сколь угодно точно, используя методы релаксации, обращения матриц или какие-либо другие методы.

Если значения ψ известны, то легко можно получить компоненты скорости, а по ним давление путем интегрирования уравнений динамики. При проведении этой процедуры уравнение вихря фактически может рассматриваться как условие интегрируемости.

5. Энергия и количество движения (импульс) в простой замкнутой системе. Если уравнения движения (3) и (4) умножить на u и затем сложить, мы получим

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{u^2 + v^2}{2} = -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} = - \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (\text{П2.13})$$

Последний член, который в общем случае может рассматриваться как источник горизонтальной кинетической энергии, в нашей задаче исчезает в силу уравнения неразрывности. Левая часть после раскрытия полной производной и использования уравнения неразрывности может быть переписана так, что (П2.13) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho u(u^2 + v^2)}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho v(u^2 + v^2)}{2} \right\} - \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} \right). \quad (\text{П2.14})$$

Можно проинтегрировать (П2.14) по нашей периодически повторяющейся области, после чего видно, что

$$r(u, v) = \frac{[uv] - [u][v]}{\sqrt{[u^2] - [u]^2} \sqrt{[v^2] - [v]^2}} = \frac{[u'v']}{\sigma(u)\sigma(v)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-y_1}^{y_1} \oint \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dx dy = 0, \quad (\text{П2.15})$$

как интеграл от дивергенции потока кинетической энергии и дивергенции давления, умноженного на скорость, равен нулю вследствие периодичности по x и условия $v \equiv 0$ на двух границах. Таким образом, на основании (П2.15) можно заключить, что, поскольку $\rho(u^2 + v^2)/2$ - кинетическая энергия на единицу объема, полная энергия в нашей системе остается постоянной, несмотря на изменения потоков во времени. Другими словами, движение продолжается по инерции.

Введем далее обозначения $u = [u] + u'$, $v = [v] + v'$, (П2.16)
где квадратные скобки означают среднее по периоду L вдоль оси x , т. е.

$$[(...)] = \frac{1}{L} \oint (...) dx. \quad (\text{П2.17})$$

Штрихи означают отклонения от среднего по x (или зонального среднего, как мы его будем называть). Вследствие неразрывности движения в нашей системе $[v] = 0$. Теперь мы можем написать соотношение

$$\int_{-y_1}^{y_1} \oint \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dx dy = \rho L \int_{-y_1}^{y_1} \frac{[u]^2}{2} dy + \rho L \int_{-y_1}^{y_1} \frac{[(u')^2 + (v')^2]}{2} dy,$$

$$r(u, v) = \frac{[uv] - [u][v]}{\sqrt{[u^2] - [u]^2} \sqrt{[v^2] - [v]^2}} = \frac{[u'v']}{\sigma(u)\sigma(v)}, \quad (\text{П2.18})$$

$$\sqrt{[v^2] - [v]^2}$$

т. е. полная кинетическая энергия остается постоянной. Она является суммой средней зональной части, представленной первым членом справа, и незональной, или, так называемой, - турбулентной, части, - представленной величинами со штрихом. С течением времени может иметь место один из трех процессов:

- а) Турбулентная часть уменьшается, зональная часть растет.
- б) Турбулентная часть растет, зональная часть уменьшается.
- в) Обе части энергии остаются постоянными.

Какой процесс будет иметь место в некоторый данный момент, зависит от решения, которое в свою очередь зависит от интегральных свойств системы, а также граничных и начальных условий. Чтобы сказать нечто большее об этих возможных обменах между зональной и турбулентной частями энергии, мы должны в некотором смысле вернуться назад и обсудить, как ведет себя количество движения системы.

Мы можем переписать уравнение движения (3) для зонального направления, раскрывая обыкновенную производную по времени и используя уравнение неразрывности, в форме

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right\} - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{П2.19})$$

Как легко проверить, интегрирование уравнения по x и y приводит к результату, который показывает, что полное зональное количество движения из-за условия

периодичности по x и исчезновения v на стенках остается постоянным во времени. Мы можем записать этот факт следующим образом:

$$\rho L \int_{-y_1}^{y_1} [u] dy = \rho L \int_{-y_1}^{y_1} [u_0] dy = const, \quad (\text{П2.20})$$

где u_0 - начальное значение u . Таким образом, профиль $[u]$ ограничивает постоянную площадь, однако распределение импульса в направлении x между различными зонами внутри канала не имеет ограничений. Это позволяет профилю $[u]^2$ изменяться, в то время как условие

$$\rho L \int_{-y_1}^{y_1} \frac{[u]^2}{2} dy \quad (\text{П2.21})$$

может изменяться. Однако очевидно, что у этой кинетической энергии имеется нижний предел, который следует из (20) и достигается, когда $[u]$ не зависит от y .

Поскольку мы только что видели, что распределение x -компоненты количества движения по различным зонам определяет среднюю зональную кинетическую энергию, рассмотрим механизм, который может производить изменения в этом распределении. Разделим систему на две области, мысленно проведя линию, параллельную стенкам при $y = Y$. Проинтегрируем (19) по области между $-y_1$ и Y , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-y_1}^Y \oint \rho u dx dy = - \int_{-y_1}^Y \oint \frac{\partial \rho u v}{\partial y} dx dy = \oint_Y -\rho u v dx = \oint_Y -\rho u' v' dx, \quad (\text{П2.22})$$

где была использована периодичность при исключении производных по x .

Последний интеграл по периоду в (П2.22) дает скорость, с которой возрастает x -компонента количества движения области интегрирования, и представляет собой поток количества движения в поперечном направлении, создаваемый возмущениями u' и v' при $y = Y$. Величина $-\rho u' v'$, определяемая этим интегралом, является напряжением Рейнольдса, или турбулентным напряжением, параллельным среднему течению. Эта величина, имеющая также вид $-\rho uv$, легко интерпретируется физически как поток импульса через единичную площадку (вертикальной поверхности при $y = Y$) и может быть выписана непосредственно.

Мы можем определить коэффициент линейной корреляции между u и v вдоль длины L при $y = Y$ формулой

$$r(u, v) = \frac{[uv] - [u][v]}{\sqrt{[u^2] - [u]^2} \sqrt{[v^2] - [v]^2}} = \frac{[u'v']}{\sigma(u)\sigma(v)},$$

откуда видно, что напряжение Рейнольдса, или ковариация u и v , есть числитель коэффициента корреляции. Здесь $\sigma(\)$ означает дисперсию величины. Нельзя определить знак этой корреляции с помощью какого-нибудь простого правила, пока мы не найдем его из решения в случае теоретической модели или измерим по фактическим данным в случае реального течения.

Тот факт, что компоненты скорости в любой данный момент на замкнутой «широтной» линии или стенке в нашей системе должны быть коррелированы, позволяет заглянуть еще немного в природу переноса импульса. Последующее изложение поможет в существенных чертах прояснить этот процесс. Предположим для конкретности, что профиль $[u]$ имеет единственный максимум в середине канала, как показано в левой части рис. П2-2. Цель рисунка - показать линии тока, при которых осуществляется перенос импульса в сторону максимума среднего профиля, т. е., например, вверх через прямую $y = -y_1/2$. То, что это так, видно по стрелкам, показывающим скорости справа и слева от оси *ложбины*, т. е. линии, соединяющей точки максимальной кривизны линий

тока. Стрелки справа показывают большие положительные u и v , в то время как слева u близки к нулю, а v отрицательны. Полный эффект обмена жидкостью через линию $y = -y_1/2$ положителен, т. е. происходит перенос x -компоненты импульса вверх.

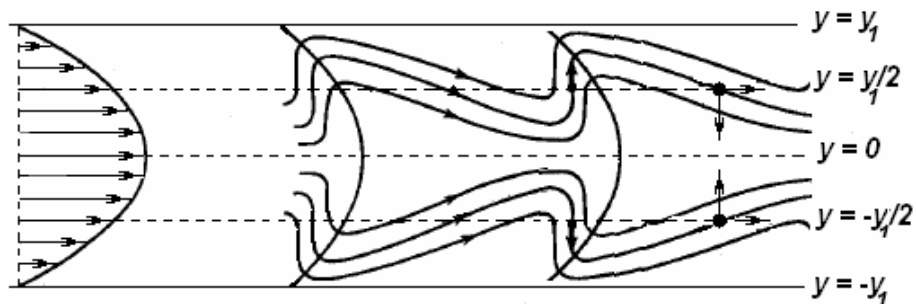


Рис. П2-2. Гипотетическое течение в канале шириной $2y_1$ показывающее конвергенцию потока импульса в средней части канала. Слева показан параболический профиль среднего течения. Возмущенные линии тока иллюстрируют типичную форму, приводящую к корреляции компонент скорости вдоль и поперек течения по длине канала. Стрелки при $y = -y_1/2$ и $y = +y_1/2$ помогают понять этот эффект.

При $y = +y_1/2$ все условия противоположны и поэтому тоже приводят к переносу импульса в сторону максимума среднего профиля скорости. Характерной особенностью, которую следует отметить, является изменение фазы возмущения по y , т. е. наклон оси ложбины. Оси ложбин, которые кажутся изогнутыми средним течением в форме, похожей на его профиль, переносят количество движения в сторону максимума скорости. Следовательно, в данном случае проявляется эффект отрицательной вязкости. Конечно, линии тока не обязательно должны быть гладкими и фактически могут иметь нерегулярный вид, однако если в статистическом смысле наклоны ложбин и корреляции существуют, то средний эффект должен быть похожим на то, что было показано выше.

Конечно, большинство реальных течений такого типа содержит случайные компоненты и, следовательно, является турбулентным. В общем случае возмущения не движутся со средним течением. Однако их движение непосредственно не входит в выражение для потока импульса.

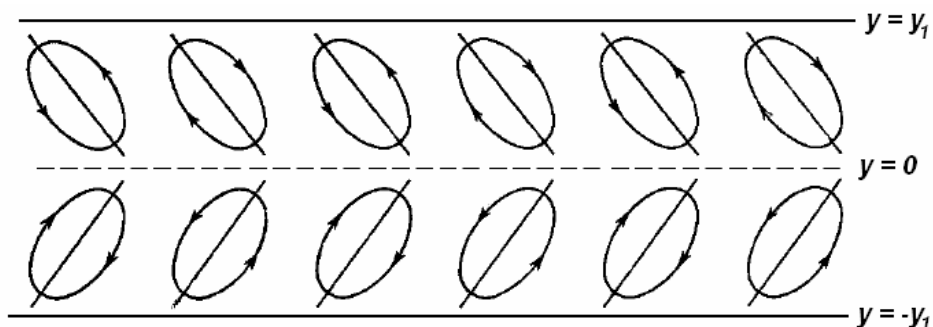


Рис. П2-3. Другое гипотетическое течение, переносящее импульс в центральную часть канала. Существенной особенностью течения являются эллиптические циркуляции с систематическим наклоном их главных осей. Следует заметить, что при полном обращении всех движений полный поток импульса к середине канала останется неизменным.

Имеются и другие, но в основном аналогичные примеры линий тока, которые осуществляют перенос импульса через канал. Так, в примере, показанном на рис. 4, осуществляется перенос импульса к середине канала, но, возможно, нет среднего течения (в этом случае последнее скоро возникнет - положительное в середине и отрицательное у стенок). Очевидно, снова будут иметь место корреляции скорости из-за эллиптичности замкнутых линий тока и наклонов их главных осей. Могут встречаться и комбинации течений, показанных на рис. П2-2 и П2-3, особенно с дополнительными турбулентными нерегулярностями.

Ясно, что возмущения, которые мы нарисовали в нашей модели и описали уравнениями, не являются акустическими или гравитационными волнами. Для простоты терминологии мы могли бы назвать их вихревыми возмущениями, так как эти движения характеризуются сохранением вихря в индивидуальных частицах.

Рассмотрим в канале узкую зону шириной δy . Импульс, приносимый в зону снизу, на нашем рисунке равен $+\rho[u'v']$, а выносимый вверх равен $\rho[u'v'] + \partial\{\rho[u'v']\}/\partial y \delta y$. Отсюда следует, что зона накапливает импульс со скоростью

$$-\frac{\partial}{\partial y} \rho[u'v'] \delta y, \quad (\text{П2.23})$$

равной полной ускоряющей силе, отнесенной к единице длины зоны. Умножив последнюю на $[u]$, мы получим работу этой силы при формировании кинетической энергии среднего потока. После интегрирования получаем

$$-\int_{-y_1}^{y_1} [u] \frac{\partial}{\partial y} \rho[u'v'] dy = \int_{-y_1}^{y_1} \rho[u'v'] \frac{\partial [u]}{\partial u} dy - [u] \rho[u'v'] \Big|_{-y_1}^{y_1}, \quad (\text{П2.24})$$

что дает скорость возрастания кинетической энергии в модели. Заметим, что в нашей модели наличие твердых стенок приводит к обращению в нуль граничных значений скорости. Следует отметить, что те зоны, в которых турбулентный перенос импульса происходит от малых к большим значениям скорости среднего течения, вносят вклад в возрастание полной кинетической энергии среднего потока. Таким образом, эффект отрицательной вязкости действует как фактор, формирующий энергию среднего течения, как того и следовало ожидать. Выражение в правой части (24) можно также получить умножением динамического уравнения движения по оси x в форме (19) на $[u]$, введением возмущений и интегрированием по рассматриваемой области.

Укажем теперь на недостатки нашей простой модели. Очевидно, что, поскольку полная кинетическая энергия должна оставаться постоянной, энергия среднего течения должна иметь своим источником турбулентную кинетическую энергию, как мы знаем из уравнения (П2.18). Отсюда следует, что эффекты отрицательной вязкости не могут доминировать в стационарном режиме, так как вся кинетическая энергия нерегулярных движений была бы скоро исчерпана. Точно так же средняя кинетическая энергия не может постоянно переходить в нерегулярные движения. Это подтверждается тем, что в подобной системе указанный поток энергии обычно регулярно или нерегулярно колеблется. В частных случаях возмущения могут сохраняться в качестве стационарных волн без приобретения или потери энергии.

Теперь можно указать, что в общем случае необходимо для поддержания квазистационарного режима в системе с преобладающим эффектом отрицательной турбулентной вязкости. Отвлекаясь от деталей, легко установить два необходимых условия:

а) Нерегулярные движения, которые переносят импульс против градиента среднего течения, должны иметь источник турбулентной кинетической энергии. Этим источником может быть преобразование других форм энергии (потенциальной, внутренней и т. д.) внутри вихрей, или она может переноситься от нерегулярных движений других масштабов, например меньших. В этом случае меньшие вихри должны получать энергию из других источников. Если таким источником в том или

другом из этих масштабов является тепловая энергия, то последняя также должна иметь соответствующий источник. Если система не является механически замкнутой, работа над нею могла бы производиться окружающей средой, с тем чтобы предотвратить затухание нерегулярных движений.

б) Среднее течение должно подвергаться некоторому виду торможения, чтобы не возрастать беспредельно. Это торможение могло бы быть истинной положительной (например, молекулярной) вязкостью, создающей потерю кинетической энергии среднего течения и утечку, импульса в дно сосуда, содержащего жидкость, или другое аналогичное механическое действие. Оно может быть также немеханическим, например магнитным. В случае электропроводящей жидкости среднее течение может тормозиться напряжениями Максвелла, для преодоления которых жидкость совершает работу наподобие динамо машины, создавая электрические токи. Здесь генерируемая магнитная энергия должна в квазистационарном режиме диссипироваться в Джоулево тепло, а тепло должно излучаться или отводиться.

Очевидно, что в случае системы, в которой нерегулярные движения возбуждаются термически, тепло, диссипируемое средним течением посредством трения или производимое гидромагнитным эффектом, не может быть использовано для возбуждения таких движений - это противоречило бы второму закону термодинамики.

Из сказанного вытекает, что стационарные эффекты отрицательной вязкости должны обнаруживаться в очень сложных системах, в частности таких, где жидкость термодинамически активна или вихри возбуждаются извне. Но такие сложные системы движений жидкости в изобилии встречаются в природе. Поэтому, не подозревая о возможном или вероятном существовании аномальных эффектов турбулентной вязкости в таких системах, мы не смогли бы сформулировать адекватное представление об их функционировании.

Добавим также, что в отличие от случая молекулярной вязкости отсюда вытекает следующее общее положение: дифференциальные свойства статистических характеристик турбулентности не могут быть рациональным путем связаны с дифференциальными свойствами среднего течения. Прежде всего, граничные условия для всей системы оказывают большое влияние на ее поведение, и мы могли бы сказать, что статистические эффекты в данной точке зависят от интегралов по пространству и времени. Также существенно, что, по крайней мере, в консервативной системе происходящее зависит от начальных условий.