

Приложение 4. Фрактальные свойства и скелинг в физике Земли

(Идеи Мандельброта, Федерера, Бака и др., Хакена, Тсаллиса).

В Приложении 4 рассмотрены свойства открытых систем, хаос и порядок, роль энтропии в открытых системах. Рассматривается уравнение Фоккера-Планка как уравнение, описывающее механизмы самоорганизации. Обсуждаются два аналитических решения этого уравнения. Описаны: самоорганизованная критичность, фликкер $1/f$ шум, фрактальные свойства систем и методы оценки фрактальной размерности. Обсуждаются явления самоподобия и самоаффинности, фрактальные периметры и поверхности, scaling и cut off. Для объяснения явления cut off приведены идеи Тсаллиса. Сравняется обычная термодинамика и термодинамика Тсаллиса. Приводятся примеры самоорганизации в физике Земли.

1. Свойства открытых систем.

“Физика открытых систем” как новое научное междисциплинарное направление заявила о себе в самое последнее время (Климонтович, 1996). Ю.Л. Климонтович считает, что у истоков этого направления стояли: физик Л. Больцман, математики А. Пуанкаре и А. Ляпунов, биолог Ч. Дарвин и другие. Для характеристики понятия “открытые системы”, автор приводит краткий перечень ключевых слов и понятий: хаос и порядок; критерии упорядоченности и нормы хаотичности; деградация и самоорганизация; переход от обратимых уравнений к необратимым; диссипативные структуры сплошной среды; неравновесные фазовые переходы и т.п. Естественно, многие из этих понятий нельзя назвать “новыми”, однако, целью “физики открытых систем” является развитие идей и методов единого описания этого широкого круга вопросов. Обозначим наиболее важные понятия:

Открытые системы обмениваются с окружающими объектами энергией, веществом и информацией.

Диссипативные процессы в открытых системах играют конструктивную роль. Диссипативные структуры, это пространственные, временные и пространственно-временные структуры. Введенный Г. Хакеном (1980) термин “синергетика” означает совместное действие макроэлементов входящих в состав диссипативных структур.

Эволюция в физических замкнутых системах приводит к равновесному состоянию. В открытых системах Климонтович выделяет два класса эволюционных процессов: самоорганизация и деградация. Процессы отличаются один от другого по степени упорядоченности (или хаотичности) системы после её эволюции. Однако далеко не всегда уменьшение степени хаотичности означает наличие самоорганизации и наоборот - увеличение степени хаотичности означает наличие деградации.

Хаос и порядок. Принято считать, что порядок рождается из хаоса. Однако, это не всегда так. Например, согласно Больцману, наиболее хаотичным является состояние равновесия. Один из примеров: перенос тепла за счет теплопроводности, это неорганизованный, хаотический процесс, а конвективный теплоперенос - это типичный пример саморегулирования теплового потока - пример самоорганизации. На поверхности жидкости при этом возникает новая периодическая структура, состоящая из ячеек Бенара. Можно привести другие примеры: появление новой структуры в неравновесном фазовом переходе; возникновение когерентной структуры, обладающей дальним порядком (например, в лазерах) и т.п.

Роль энтропии в открытых системах. Энтропия обладает совокупностью свойств, позволяющей использовать её в качестве меры неопределенности (хаотичности) процессов. Известно, что при обратимом адиабатическом процессе энтропия неизменна. Согласно Больцману, при временной эволюции системы к равновесному состоянию, её

энтропия возрастает и остается неизменной при достижении равновесного состояния. Средняя энергия в замкнутой системе остается неизменной при эволюции системы к состоянию равновесия. Отсюда следует, что энергия не может служить мерой неопределенности системы.

Изменение энтропии открытой системы dS складывается из её изменения за счет притока из окружающей среды dS_e и её увеличения $dS_i > 0$ за счет внутренних диссипативных процессов (Изаков, 1997):

$$dS = dS_e + dS_i$$

В открытой системе может быть как приток, так и отток энтропии, т.е. dS_e может иметь любой знак, и энтропия системы может увеличиваться или уменьшаться, но энтропия вместе с окружающей средой всегда увеличивается в соответствии со вторым законом термодинамики.

Энтропия неравновесных систем может быть выражена формулой Гиббса для термодинамических параметров, находящихся в состоянии локального равновесия:

$$dS = dE/T + pdV/T - 1/T \sum \mu_i dN_i \quad (\text{П4.1})$$

Здесь E - внутренняя энергия, T - температура, p - давление, V - объем μ_i , N_i - химический потенциал и число частиц i -го компонента системы.

Следуя Изакову, обозначим через s удельную энтропию, поделив её на массу: $s = S/M$, тогда изменение удельной энтропии $\partial s / \partial t$ во времени:

$$\partial(\rho s) / \partial t + \text{div } J = \sigma_s$$

Производство энтропии равно (Изаков, 1997):

$$\sigma_s = Q \nabla(1/T) - 1/T \nabla v - \sum \rho_k v_k \nabla(\mu_k/T) - 1/T \sum \omega_{ki} A_{ki} \quad (\text{П4.2})$$

Здесь первый член описывает производство энтропии в процессе теплопроводности, второй – за счет вязкости, третий – за счет диффузии, четвертый - в химических реакциях и фазовых переходах.

2. Уравнение Фоккера-Планка.

Возникновение трещины - случайный процесс, вероятность его не зависит от предыстории системы. Такие процессы принято считать марковскими (пуассоновскими). Вероятность того, что система в момент времени $t + \Delta t$ окажется в состоянии с параметром $q + dq$ описывается интегральным уравнением Смолуховского:

$$f(q, t + \Delta t) = \int f(q_0, t) g(q_0, q - q_0, \Delta t) dq, \quad (\text{П4.3})$$

где $g(q_0, q - q_0, \Delta t)$ - вероятность перехода системы из точки q_0 в точку q за время Δt . После стандартных преобразований этого уравнения: $\partial f(q, t) / \partial t = - \partial / \partial q$, получаем одномерное уравнение Фоккера-Планка:

$$j = d(\gamma q f) / dq + 1/2 Q d^2(f) / dq^2, \quad (\text{П4.4})$$

где $\gamma q = K$ - коэффициент дрейфа, а Q - коэффициент диффузии. Это уравнение, как известно, описывает самоорганизацию системы. Физическая суть механизма самоорганизации состоит во взаимодействии двух механизмов переноса: дрейфа и диффузии (перколяции). В нашей модели, как мы показали, имеют место оба этих процесса.

При решении уравнения Фоккера-Планка находятся стационарные решения, когда аргумент не зависит от времени, а так же решения, зависящие от времени, но не зависящие от координаты. Рассмотрим два известных решения этого уравнения, которые были впервые предложены Фоккером (совместно с Планком) еще в 1914 г. для описания закономерности распределения средней энергии вращающегося электрического диполя в поле излучения. Заметим, что уравнение ФП, в своем первоначальном виде, предназначалось для описания физики взаимодействия между частицей и излучением

(полем). Впоследствии выяснилось, что это уравнение объясняет широкий спектр различных явлений самоорганизации в областях физики, химии, биологии, социологии и т.п. (Хакен, 1980).

Стационарное решение уравнения ФП для одномерного случая выглядит следующим образом (Хакен, 1980):

$$f(q) = N \exp(-2V(q)/Q), \quad (\text{П4.5})$$

где $V(q) = - \int K(q) dq$, имеет смысл потенциала, а N - нормировочный множитель.

Стационарное решение этого уравнения, полученное в (Климонтович, 1983), несколько отличается от предыдущего:

$$f(q) = \exp [F_o - (aq + 1/2bq)/D], \quad (\text{П4.6})$$

где F_o - "свободная энергия" - аналог флуктуирующих сил, a - параметр обратной связи ($a = 0$, означает начало генерации), b - параметр нелинейности, D - интенсивность гауссовского шума.

Сравнивая решения (5) и (6), видим их общность, которая состоит в том, что функция плотности вероятности имеет экспоненциальный характер, причем, в показателе степени экспоненты имеется "силовой" параметр, характеризующий потенциал, энергию и т.п. Физический смысл решения уравнения ФП состоит в зависимости вероятности появления функции с определенным потенциалом от величины этого потенциала. Чем выше потенциал (энергия и т.п.), тем меньше вероятность появления этого решения. По-видимому, эта особенность является фундаментальным свойством природы.

Рассмотрим нестационарные решения. В простейшем, одномерном виде, решение нестационарного (зависящего от времени) уравнения Фоккера-Планка имеет вид:

$$f(q, t) = (\pi a(t))^{-1/2} \exp\{-(q - b(t))^2/a(t)\}, \quad (\text{П4.7})$$

здесь: $a(t) = Q/\alpha(1 - \exp(-2\alpha t)) + a_o \exp(-2\alpha t)$, $b(t) = b_o \exp(-\alpha t)$.

При $a \rightarrow 0$ ($a_o = 0$), решение сводится к δ -функции. Это решение показывает, что при выполнении определенных условий, в диссипативной самоорганизующейся системе может возникнуть нестационарное решение, например (при соответствующем значении входящих в уравнение ФП параметрах), в виде "отдельной волны". Это решение (в виде волны, или δ -функции) может, как показано в (Хакен, 1980), при перемещении во времени и в пространстве постепенно "расплываться" и ослабевать, а может, наоборот, усиливаться и "сжиматься" в пространстве и во времени. Это решение позволяет, в принципе, рассматривать возможность проявления эффекта внезапного усиления акустической эмиссии при неизменной нагрузке на образец горной породы (Lei et al., 1992), которое может оказаться причиной возбуждения сверхизлучения, реализуемого в виде ударной волны.

Приведем результат решения линеаризованного уравнения ФП, типа:

$$dq/dt = -\alpha q + \gamma \Delta q + F. \quad (\text{П4.8})$$

Здесь α - внешний параметр (имеет физический смысл плотности потока), γ - скорость затухания волнового потока в системе.

Корреляционная функция: $\langle q(x', t') q(x, t) \rangle$ для одномерного случая при совпадающих моментах времени $t' = t$ равна:

$$\langle q(x', t) q(x, t) \rangle = Q/(\alpha\gamma)^{1/2} \times \exp[-(\alpha/\gamma)^{1/2} |x' - x|]. \quad (\text{П4.9})$$

Множитель при $|x' - x|$ в показателе экспоненты имеет размерность обратной длины. Поэтому, h_k - корреляционная длина: $h_k = (\alpha/\gamma)^{-1/2}$. Очевидно, что $h_k \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$ и, наоборот, при увеличении плотности потока, длина корреляции уменьшается. Параметр $d = (\alpha/\gamma)^{1/2} h_k$ - выражает фрактальную размерность, или иначе, размерность кластера. Обратим внимание на формулу, связывающую плотность потока импульсов и характерный размер h . Полагая, что первый параметр (α) есть ни что иное, как N (число событий), а второй (размер h) может характеризовать их энергию E , получаем: $E \sim N^{1/2}$, или иначе: $N \sim E^{-2}$.

Последнее выражение похоже на закон Гутенберга-Рихтера. Кроме этого, эта формула показывает, что в некотором интервале значений интенсивность потока линейно связана с характерным размером (масштабом) образующихся кластеров, тогда это скейлинговое (scaling) отношение.

Таким образом, например, построив теорию самоорганизации излучающих звук трещин, можно получить основные закономерности сейсмичности. Это, с одной стороны, открывает путь к пониманию природы землетрясения и, с другой, позволяет найти объяснение результатов, полученных при лабораторном моделировании.

3. Самоорганизованная критичность.

Как было показано в работе (Vak et al., 1987) и серии последующих работ различных авторов, системы с большим количеством взаимодействующих элементов естественным образом эволюционируют к критическому состоянию, в котором любое малое событие может привести к катастрофе или резкой смене состояния. Это состояние системы было названо авторами состоянием самоорганизованной критичности.

Согласно этой теории, составные части системы никогда не достигают равновесия, а эволюционируют от одного метастабильного состояния к другому. Авторы демонстрируют основную идею своей теории на примере с кучей песка. Песчинки сыпаются медленно и равномерно и всегда из одного и того же места. Они образуют кучу, склон которой становится все круче, до тех пор, пока песчинки не вызовут лавину. Считается, что система (куча песка) перед тем, как на неё упала последняя песчинка, находится в критическом состоянии. Песок сыплется с постоянной скоростью, а его количество меняется со временем. График этой величины представляет собой набор случайных хаотических чисел различной длительности, это *фликкер-шум* или шум мерцания. От белого шума он отличается тем, что система “помнит” все свои предыдущие состояния.

Баком и др. (ВТВ) было получено наиболее убедительное доказательство генерации фликкер-шума и образование самоорганизованной критичности двумерной структурой, включающей 100×100 маятников, связанных между собой торсионными пружинами. Начальное условие состоит в том, что маятники нестабильны и колеблются. Затем система почти уравнивается и достигает т.н. локально минимально стабильного (т.е. максимально чувствительного) состояния. Предположим, что мы толкнем один маятник, ослабляя силу, удерживающую его в квазистабильном состоянии. Это вызовет колебания соседних маятников, и возмущение (шум) будет передаваться в системе посредством эффекта домино. Если в конце процесса все маятники вернуться в исходное состояние, то система стабильна к малым возмущениям. Ситуация существенно отличается, если возмущение будет усиливаться при его распространении, эта конфигурация уже нестабильна к малым возмущениям. Такая система эволюционирует, и в ней образуется всё больше и больше минимально стабильных состояний, которые начнут задерживать распространение шума. Система придет в стабильное состояние в том случае, когда шум не сможет распространяться сколь угодно далеко. В этой ситуации можно ожидать возникновение пространственно-инвариантной структуры минимально стабильных состояний, т.е. образования самоподобных фрактальных структур.

Практически все экспериментальные и численные результаты $\log\text{-}\log$ зависимостей показывают, что в интервале больших значений величин энергий наблюдается резкое изменение функции распределения энергии (“обрезания” - cutoff). Принято считать, что cutoff определяется размером системы $\sim L^{2.2}$ (Olami et al., 1992). Однако это объяснение вызвало сомнение у ряда авторов, занимающихся проблемой самоорганизованной критичности в применении к физике сейсмичности и закону Гутенберга-Рихтера, в частности, относительно того, что зависимость $\sim L^{2.2}$ не может быть применена, по видимому, в системах с очень большим размером L . Тем не менее, большинство авторов считают, что изменение наклона кривой частоты (вероятности) появления события

(например, землетрясения) с энергией E от величины этой энергии (cutoff, обрезание и т.п.) определяется реологией среды, и что это явление зависит от линейного размера системы L .

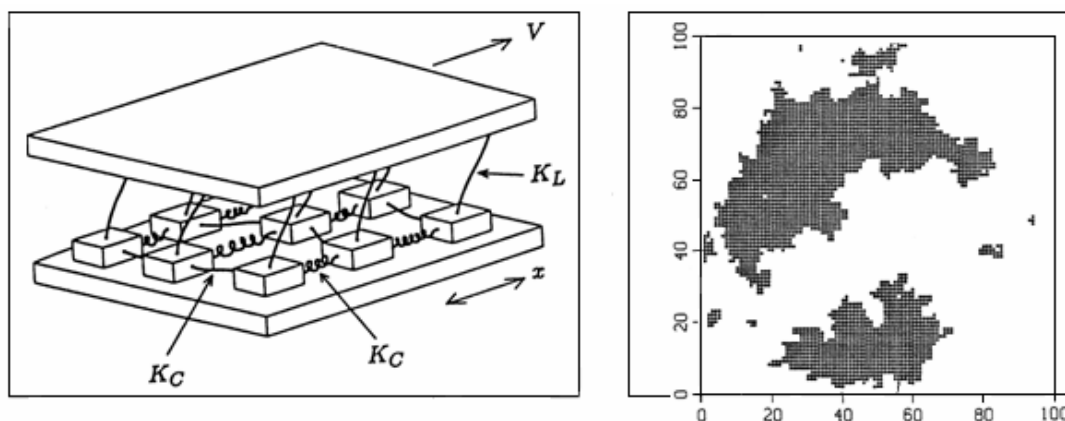


Рис. П4-1. Модель сейсмичности Барриджа-Кнопова (БК) (слева). Рис. П4-2. Эффект образования кластеров, составленных из групп маятников, связанных между собой торсионными пружинами, находящихся в стабильном состоянии (справа).

Рисунок П4-2 иллюстрирует эффект образования кластеров, составленных из групп маятников, связанных между собой торсионными пружинами, находящихся в стабильном состоянии, на “фоне” остальных - нестабильных. Как показали БТВ, такие кластеры возникают в двумерной матрице, составленной из 100×100 маятников при их внешнем возмущении. Начальное условие существования такой системы состоит в том, что все маятники нестабильны. Они будут колебаться до тех пор, пока не достигнут состояния, при котором силы, действующие на маятники со стороны пружин, уравновесят силы гравитации. Предположим, что система маятников находится в стабильном состоянии. Слегка ослабим один маятник, после чего окружающие его маятники окажутся нестабильными, и шум будет распространяться (явление перколяции) к дальним соседям по цепной реакции. Эта система оказывается нестабильной к малым возмущениям и не может служить аттрактором. При самоорганизации система будет развиваться таким образом, чтобы в ней образовывалось все большее и большее количество более чем минимально стабильных состояний, которые способны задерживать движение (перколяцию) шума. Когда она достигнет такого состояния, при котором шумовой сигнал не будет способен распространяться сколь угодно далеко, такая система (кластер) приобретет свойства, характерные для пространственно-инвариантных (scaling) структур.

Масштабная (scaling) картина дает начало степенной зависимости частоты от спектра шума, что, в свою очередь, приводит к возникновению фракталов (структур с дробной размерностью), которые, собственно, и представляются как минимально-стабильные состояния, образующиеся в динамических процессах и останавливающиеся в SOC-точке. Отсутствие характерной длины фрактала равносильно отсутствию характеристического времени развития флуктуаций t . Распределение времен жизни фрактала $D(t) \sim t^{-a}$ приводит к спектру частот $S(\omega) \sim \omega^{-2+a}$.

Для того чтобы наглядно представить физическую систему, которая может обнаружить свойства SOC, БТВ рассматривают процесс осыпания кучи песка. Если склон кучи слишком велик, то куча далека от состояния равновесия. Песок будет осыпаться до тех пор, пока средний наклон песка в куче не достигнет критического значения, когда система почти стабильна по отношению к малым возмущениям. Фликкер “ $1/f$ ”-шум, это динамический отклик осыпающейся кучи песка на малые случайные возмущения.

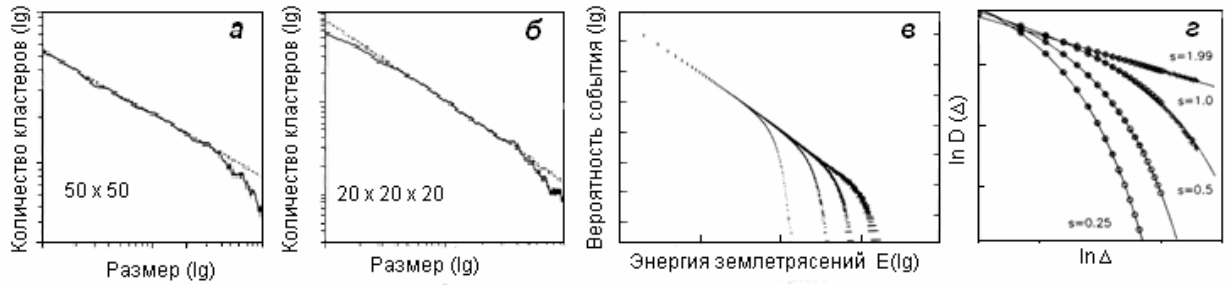


Рис. П4-3. График распределения количества кластеров определенных размеров (log-log), образующихся в двумерной решетке маятников (а, б). в - эффект резкого изменения функции распределения энергии (“обрезания” – cut off) в зависимости от размера структуры: $\sim L^{2.2}$, г - вероятность $D(\Delta)$ как функция размера Δ для различных значений s .

Вернемся к модели с маятниками. На рис. П4-2 темные области показывают кластеры, которые возникают благодаря наличию домино-процесса, начинающегося с перемещения только одного маятника. На рис. П4-3-а, -б показан log-log график распределения количества кластеров определенных размеров, образующихся в двумерной решетке маятников, полученный подсчетом площади кластера, равной числу маятников, испытавших влияние единичного воздействия. Тот факт, что прямая линейна на протяжении двух десятков отсчетов, показывает, что система находится в SOC с scaling-распределением кластеров.

Собственно, после выхода работы БТВ, у физиков и геофизиков возник повышенный интерес к модели БК. Действительно, идея БТВ относительно маятников была предвосхищена значительно раньше, еще в spring-block модели БК. Двое из БТВ (Бак и Танг), по-видимому, одними из первых объяснили закон Гутенберга-Рихтера как SOC. БТ для простой ячеистой stick-slip модели получили зависимость $D(E) \approx E^{-\tau}$, с $\tau = 1.0$ и $\tau = 1.35$ для двумерной и трехмерной матриц, соответственно. В расчетной модели у БТ возникали явления scaling и cutoff.

Проблемы scaling и cut off. Идея самоорганизующейся системы получила дальнейшее развитие в работе (Olami et al., 1992). В отличие от предыдущих моделей, здесь авторы Олами, Федер и Кристинсен (ОФК) применили ячеистую неконсервативную модель процессов, что единственно правильно применительно к такой диссипативной системе как Земля. В основу этой двумерной модели, как и во всех других, была положена spring-block идея Б-К. Авторы определили $L \times L$ массив блоков посредством i, j - элементов (в интервале от 1 до L). Смещение каждого блока от его предыдущего положения определяется как $dx_{i,j}$. Общая сила, оказывающая влияние со стороны пружин на данный блок (i, j) выражается следующим образом:

$$F_{ij} = K_1[2dx_{i,j} - dx_{i-1,j} - dx_{i+1,j}] + K_2[2dx_{i,j} - dx_{i,j-1} - dx_{i,j+1}] + K_L dx_{ij}, \quad (\text{П4.10})$$

где: K_1, K_2 и K_L - упругие константы (см. рис. П4-1).

Когда две жесткие пластины движутся относительно друг друга, общая сила, действующая на каждый блок, увеличивается (пропорционально $K_L V$, где V - относительная скорость двух пластин) до тех пор, пока не будет достигнуто пороговое значение и не начнется процесс релаксации - запуска землетрясения. Авторы показывают, что после локального скольжения, силы, оказывающие влияние на блок, изменились:

$$\begin{aligned} F_{i+1,j} &\rightarrow F_{i+1,j} + \delta F_{i+1,j}, \\ F_{i,j+1} &\rightarrow F_{i,j+1} + \delta F_{i,j+1}, \\ F_{i,j} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{П4.11})$$

где увеличение сил, действующих на ближайших соседей, равно:

$$\begin{aligned} \delta F_{i+1,j} &= [K_1/(2K_1 + 2K_2 + K_L)] F_{i,j} = \alpha_1 F_{i,j} \\ \delta F_{i,j+1} &= [K_2/(2K_1 + 2K_2 + K_L)] F_{i,j} = \alpha_2 F_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{П4.12})$$

Если $K_L > 0$, то система неконсервативна, если $K_1 \neq K_2$, ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), то модель анизотропна, если $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, - одномерный вариант spring-block модели.

Авторы ограничились рассмотрением изотропного случая:

$$K_1 = K_2, (\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha).$$

В этом случае: $\alpha \approx 0.2$. В результате численного моделирования была получена зависимость показателя степени “В” в законе Гутенберга-Рихтера от α : при изменении $L = 15, 25, 35$ и 50 и $\alpha = 0.2$, величина $B \approx 0.91$. Исследование зависимости резкого изменения функции распределения энергии обрезания – cutoff, как функции размера, показало, что она действительно определяется размером системы как: $\sim L^{2.2}$ (см. рис. 16-3-в).

При $\alpha = 0$ движение блоков из-за отсутствия взаимодействия будет не связанным. Следовательно, должен наблюдаться переход системы к локализованному поведению блоков системы. Это явление действительно наблюдалось при $\alpha \approx 0.05$. При исследовании динамических диапазонов параметров, авторам удалось показать, что в spring-block модели существует огромное фазовое пространство метастабильных состояний. Эти состояния теряют стабильность при превышении определенных порогов значений. Этим модель авторов отличается от других аналогичных ей, основанных на диффузионных уравнениях. Авторы полагают, что им удалось выявить одно из фундаментальных свойств моделирования землетрясения.

Работа ОФК не осталась незамеченной, сразу после ее выхода последовали комментарии (Klein, Rundle, 1993). Его авторы выразили сомнение в том, что cutoff (обрезание) энергии землетрясений может иметь зависимость $\sim L^{2.2}$, а так же в том, что при граничном размере $L = 50$, система способна достичь масштабного предела (scaling). На это замечание Кристенсен (один из авторов ОФК) ответил (Christensen, 1993), что он согласен с тем, что зависимость $\sim L^{2.2}$ не может, по-видимому, распространяться на системы с очень большим размером L , однако отметив при этом, что главный вывод из их работы (Olam et al., 1992) состоит в том, что именно неконсервативная spring-block модель описывает критическое состояние со степенным законом распределения, зависящее от уровня консервативности, хотя, подчеркивает автор, в модели до сих пор не получено значение области масштабирования, т.е., иначе, - “scaling”-а.

Исследования, аналогичные ОФК, были проведены Дингом и Лу (Ding, Lu, 1993), где была предпринята попытка аналитически решить задачу spring-block модели. Авторам удалось вычислить размер области скольжения блока Δ , а так же показать, что существует пропорциональность между Δ и его вероятностью $D(\Delta)$ с универсальным показателем степени $\xi = -3/2$:

$$D(\Delta) \sim \Delta^\xi \exp(-\Delta/\Delta_0) \quad (\text{П4.13})$$

(см. рис. П4-3-г, на котором параметр $s \approx \alpha$, где α - примерно та же величина, что и в ОФК-модели). Размер скольжения, в этой работе, определяется как число блоков, движущихся (“прыгающих”) одновременно. Основным преимуществом (по мнению авторов) этой системы является то, что вероятность $D(\Delta)$ скольжения с размером Δ может быть точно вычислена при термодинамическом пределе и масштабирующее соотношение (scaling) может быть получено аналитически. Сравнивая рис. 3-в и -г, видно, что компьютерное моделирование spring-block модели качественно соответствует ее аналитическому решению. При более внимательном сравнении этих работ, можно выяснить, что в первой $\alpha^1 = 1/5$ (для $K_1 = K_2 = K_L$), а во второй, - $\alpha^{11} = 1/2$ (для $K_1 = K_2, N = 1$). Полагая $s = 2\alpha^{11}$, получим: $s = \alpha^1$. Учитывая полученное, видно, что эти рисунки практически идентичны.

Выводы:

- 1) изменение наклона кривой частоты (вероятности) появления землетрясения с энергией E от величины этой энергии (cut off, обрезание и т.п.) определяется реологией среды: чем меньше $\alpha(s)$, тем на больших энергиях происходит cut off;
- 2) это явление зависит от линейного размера L : cut off $\sim L^{2.2}$.

Фликкер $1/f$ шум. Шум мерцаний, или $1/f$ -шум, является наиболее распространенным в природе типом флуктуаций. Он обнаруживается в неравновесных явлениях самой различной природы. По-видимому, первыми обратили внимание на это свойство еще в древнем Египте, когда обнаружили, что большие разливы Нила происходят очень редко и чем меньше величина разлива, тем чаще он происходит. С появлением телескопов астрономы фиксировали мерцания звезд, статистика мерцаний подчинялась этой формуле, поэтому фликкер шум иначе называется шумом мерцаний (flicker - мерцать). Несмотря на столь почтенный возраст, физика этого явления остается недостаточно ясной. Понятно, что фликкер шум отличается от т.н. белого шума тем, что здесь флуктуирующая система “помнит” о своих предшествующих “шагах”.

Рядом авторов было обнаружено возникновение интенсивного широкополосного $1/f$ -шума в области критического неравновесного фазового перехода между различными режимами теплообмена в системе. Эксперименты проводились на сверхпроводящей структуре, помещенной в жидкий азот. При пропускании критического тока происходило локальное повышение температуры, и азот начинал кипеть (собственно - фазовый переход). Кипение азота сопровождалось усилением амплитуды флуктуаций напряжения и тока в структуре. Спектр колебаний становился подобным $1/f^{1.02}$. Авторы произвели цифровой эксперимент флуктуации температуры δT , используя формулу Хакена (1980):

$$\delta T = -\alpha \delta T - \beta \delta T^3 + \Gamma(t), \quad (\text{П4.14})$$

где α и β - коэффициенты, а $\Gamma(t)$ - начальный шум. При численном моделировании, подбирая величины коэффициентов и шума, авторы получили зависимость, спектр которой находился между $1/f$ и $1/f^2$. Они полагают, что такой подход открывает путь для объяснения явления самоорганизованного критического состояния.

4. Фрактальные свойства систем.

Геометрия встречающихся в природе объектов различных размеров - от атомных масштабов, до Вселенной - занимает важное место в моделях, которые мы строим, чтобы понять природу. Геометрия траекторий частиц; линий тока в гидродинамике, гор, рек, геометрическая структура кристаллов и т.п. также представляется весьма значительной в различных областях естествознания. В природе происходят как детерминированные движения, так и (что значительно чаще встречается) хаотические. Простейшие динамические системы обладают свойством резко менять характер своего движения от регулярного к случайному, хаотическому при малейших изменениях какого-либо параметра. В случае хаотического движения фазовые траектории частиц, обладающих близкими начальными параметрами, быстро расходятся и потом хаотически перемешиваются, так как они способны удаляться друг от друга до какого-то предела. Притягивающее множество неустойчивых траекторий в пространстве состояний диссипативной системы принято называть стохастическим, странным аттрактором. Важнейшим свойством странного аттрактора является фрактальность. Понятие фракталы введено Мандельбротом (Mandelbrot, 1983) для более достоверного описания большого класса природных объектов. Фракталы - это объекты, проявляющие по мере увеличения масштаба, все большее и большее количество деталей, сохраняя при этом свои основные свойства.

Природа слишком разнообразна для того, чтобы её можно было описать с помощью математических множеств, обладающих целой, топологической размерностью: линиями, квадратами, кубами и т.п. Преобладающее большинство объектов, присущих природе, обладает дробной размерностью, - это фракталы. Фракталы могут быть как

регулярными (например, кривая Коха), так и стохастическими (траектория броуновского движения). Фрактал принято считать мгновенным “срезом” самоорганизующихся критических процессов. Фрактальные структуры и шум мерцания - пространственные и временные “отпечатки” самоорганизованной критичности.

Фрактальная размерность. Топологическая размерность D_T , с которой мы имеем обычно дело, приписывает счетному множеству размерность нуль ($D_T = 0$), кривым - размерность ($D_T = 1$), поверхностям размерность ($D_T = 2$) и т.д. Однако в природе встречаются объекты, размерность которых не всегда можно определить заранее. В качестве примера обычно приводят траекторию броуновской частицы: Она имеет размерность ($D_T = 1$), однако, чем больше время наблюдения, тем плотнее траектория заполняет плоскость и через какое-то время будет от неё неотличима. Размерность множества в промежутке времени между началом и концом процесса: $1 \leq D_T \leq 2$. Для описания таких случаев используется размерность Хаусдорфа (D_H). Эта характеристика системы, позволяет получить более тонкую информацию об исследуемом множестве, чем обычная топологическая размерность D_T . Хаусдорфова размерность множества:

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}, \quad (\text{П4.15})$$

позволяет различать (до известных пределов) степень сложности траекторий. Для отрезка прямой (или гладкой кривой) $D_H = D_T = 1$, для плоскости $D_H = D_T = 2$ и т.д. Это означает, что для простых случаев топологическая и хаусдорфова размерности совпадают.

Приведем несколько примеров:

Кривая Коха. Длина отрезка ломаной $r_n = 1/3^n$. Этими отрезками, “как кубиками”, покрывается кривая Коха. Число таких “кубов” $N(r_n) = 4^n$, отсюда $D_H = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$. Как мы отмечали для кривой $D_T = 1$ и поэтому, в данном случае: $D_H > D_T$.

Канторово множество. Из единичного отрезка выбрасывается средняя треть. Эта процедура повторяется с каждым из двух образовавшихся отрезков. Хаусдорфова размерность $D_H = \ln 2 / \ln 3$, т.е. $0 < D_H < 1$.

Ковер Серпинского. Единичный квадрат делится на 9 равных частей, и средний квадрат выкидывается, затем процедура повторяется. Здесь: $N = 8$, $r_n = 1/3$, отсюда $D_H = \ln 8 / \ln 3$, и $1 < D_H < 2$.

Определение фрактала, данное Мандельбротом (2002): Фрактал, это множество, хаусдорфова размерность которого строго больше топологической. Размерность D_H отражает свойство масштабной инвариантности, скейлинга (scaling) рассматриваемого множества.



Рис. П4-4. Фрактальные структуры.

Скейлинг. Из термодинамического определения теплоемкости $c = -T \partial F / \partial t$ следует, что при $t \rightarrow 0$, удельная теплоемкость ведет себя как $c \sim t^\alpha$ (Это типичная скейлинговая зависимость). Здесь $F(t) \sim t^{2-\alpha}$ - свободная энергия (удовлетворяет скейлинговому отношению). Аналогичная скейлинговая зависимость описывает статистические свойства протекания, или перколяции (Федер, 1991).

Протекание и “вязкие пальцы”. Примеры протекания (перколяции) многообразны. Простейший пример, это поведение воды в перколяторе (кофеварке). Сюда можно отнести процессы диффузии в растворителе или электронов в полупроводнике, просачивание воды в трещины или вытеснение одной жидкости другой и т.п. Все задачи протекания связаны с геометрией. Во многих задачах, оказывается, достаточно рассмотреть двумерное протекание на квадратной решетке размером L^2 . Масса кластера $M(L)$ зависит от размеров решетки:

$$M(L) \sim \ln L \quad (p < p_c); \quad M(L) \sim L^D \quad (p = p_c); \quad M(L) \sim L^E \quad (p > p_c); \quad (\text{П4.16})$$

где p_c - критическая вероятность. Величина кластеров при перколяции может варьироваться в очень широких пределах. Порог протекания определяется распределением кластеров по величине. Для того чтобы более точно определить размер кластера, состоящего из s -узлов, вводится понятие радиуса гирации (гирорадиус) $R_g(s)$:

$$R_g^2(s) = (1/2s^2) \sum (r_i - r_j)^2. \quad (\text{П4.17})$$

Несколько отличается от (13), выражение для радиуса гирации кластера на пороге протекания: $R_g(s) \sim L^{2-(E-D)}$.

Существенным аспектом подхода к образованию кластеров на пороге протекания является образование *самоподобной* структуры процесса. Самоподобие приводит к степенным зависимостям различных величин. Однако не каждый показатель степенного ряда можно считать фрактальной размерностью. Выражения для $R_g(s)$, это типичный пример *скейлинга* конечных масштабов.

Представляет интерес динамическая *перколяция с вытеснением* для двух несмешивающихся жидкостей, между которыми сохраняется разность давлений $\Delta p = 2\sigma \cos \theta / r$, где σ - межфазное натяжение на границе жидкостей, θ - краевой угол, r - радиус кривизны поры. Если одна из жидкостей вода, а другая масло, то вода спонтанно вытесняет масло из пористой среды, если давление воды специально не поддерживается на более низком уровне, чем давление масла. Масса вытесняемого кластера $M(L) = AL^D$, где $D = 1.89$. Аналогичная ситуация происходит и при перколяции с захватом, однако, здесь величина D несколько меньше.

Стоит остановиться на т.н. *диффузионном фронте*, возникающим при диффузии от источника. Он имеет фрактальную структуру, которая связана со *скорлупой* перколяционного кластера. Коэффициент диффузии D определяется формулой Эйнштейна:

$$D = a^2 / 2\tau, \quad (\text{П4.18})$$

где a - расстояние между ближайшими узлами решетки, τ - время столкновения. Диффузионная длина l определяется как среднеквадратичное смещение частицы от начального положения:

$$l^2 = 2a^2 t / \tau. \quad (\text{П4.19})$$

Масса перколяционного кластера:

$$M(L, l) = l^\alpha l^{\nu/1+\nu}. \quad (\text{П4.20})$$

Показатель α определяет изменение ширины скорлупы с диффузионной длиной l , ν - показатель размерности решетки, для двумерной $\nu = 4/3$.

В двумерных пористых средах с вытеснением, перколяционный фронт образует структуры, получившие название *вязких пальцев*. Это фрактальные структуры играют важную роль при вытеснении нефти водой (Федер, 1991).

Временные ряды. Мониторинг геофизических параметров состоит в непрерывной регистрации их с помощью однотипной аппаратуры в течение длительного времени. Временные ряды, кроме этого, воссоздаются и по палео- и архео- данным. Как правило, временные ряды демонстрируют случайность и хаотичность процессов, происходящих и происходивших ранее (если, конечно, не наблюдается суточная или годовая цикличность). Обычный способ сопоставления двух процессов, это вычисление функции взаимной корреляции. В последние годы популярность приобрел метод исследования

фрактальных временных рядов Херста (Федер, 1991). Суть его состоит в том, чтобы оценить величину *нормированного размаха* (метод R/S). Разность между максимальными и минимальными величинами ряда:

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau), \quad (\text{П4.21})$$

где t - дискретное время, а τ - длительность рассматриваемого промежутка времени. S - стандартное отклонение:

$$S = \{1/\tau \sum [\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau]^2\}^{1/2}. \quad (\text{П4.22})$$

Как обнаружил Херст, для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах R/S очень хорошо описывается эмпирическим соотношением: $R/S = (\tau/2)^H$.

Показатель Херста H принимает для земных процессов величину, равную примерно $H = 0.73$ со стандартным отклонением равным примерно 0.09. Очевидно, что исследуемые этим методом временные ряды были очищены от сезонных вариаций.

Самоподобие и самоаффинность (affinis - смежный, аффинные преобразования - преобразования подобия, параллельного переноса, вращения). Фрактальное множество L точек *самоподобно и статистически автомодельно*, если оно является объединением непересекающихся подмножеств, каждое из которых получено путем преобразования с коэффициентом r ($0 < r < 1$), обладающих в точности теми же статистическими свойствами, что и r .

Аффинное преобразование переводит точку $x = (x_1, \dots, x_E)$ в новую точку с координатами $x' = (r_1 x_E, \dots, r_E x_E)$. Множество L самоаффинно по отношению к вектору подобия r , если L является объединением N непересекающихся подмножеств, каждое из которых получено из исходного множества аффинным преобразованием с помощью $r(L)$.

Фрактальная размерность самоаффинных фракталов не определяется однозначно. Размерность по покрытию графика функции можно определить формально по числу клеток $N(b; a, \tau)$, необходимых для покрытия кривой:

$$N(b; a, \tau) \sim b^{-D},$$

здесь: $b\tau$ - ширина и ba - длина клетки, D - фрактальная размерность.

С другой стороны, для покрытия кривой длиной T , необходимо иметь $T/b\tau$ отрезков. В пределах каждого отрезка, диапазон изменения функции имеет порядок величины: $\Delta B_H(b\tau) = b^H \Delta B_H(\tau)$. Для того, чтобы покрыть такой размах, необходимо взять: $b^H \Delta B_H(\tau)/ba$ рядов клеток высотой ba каждая. Для покрытия кривой необходимо:

$$N(b; a, \tau) = [b^H \Delta B_H(\tau)/ba] \times T/b\tau \sim b^{H-2} \sim b^{-D}. \quad (\text{П4.23})$$

Отсюда следует соотношение: $D = 2 - H$ для *самоаффинных кривых*.

Для гауссова броуновского движения с независимыми шагами $H = 1/2$. H имеет тот же смысл, что и показатель Херста. При $H = 1/2$ имеет место случайный процесс с независимыми приращениями. Однако при $H \neq 1/2$ система сохраняет свойство поддерживать тенденцию (персистентность). Для $H > 1/2$, если приращения были положительными, они будут таковыми и в будущем, если $H < 1/2$, то тенденция изменится на противоположную. Это свойство проявляется системой для сколь угодно большого интервала времени.

Фрактальные периметры и поверхности. Исследование облаков показало, что изменяя размер облаков в широком интервале (площадь изменялась на 6 десятичных порядков), периметр облака P связан с его площадью A соотношением: $P = A^D$. Это приводит к выводу, что в атмосфере отсутствуют пространственные масштабы, а облака самоаффинные фракталы. Фрактальная размерность $D = 1.35$ (по другим данным: $1.37 < D < 1.41$).

Приведем некоторые теоретические модели, объясняющие этот экспериментальный факт (Федер, 1991). Из всего многообразия значимых для описания

атмосферы параметров, выбирается один, например, локальная температура $\theta(x, y, z)$. Точку (θ, x, y, z) можно рассматривать в 4-х мерном пространстве. Множество точек $L_o = \{(\theta, x, y, z)\}$ в четырехмерном пространстве фрактально и его размерность равна $D = 4 - H$, где H - коразмерность. Поверхность облака представляет собой множество точек L в обычном трехмерном пространстве, фрактальная размерность его $D = 3 - H$. Формально мы имеем $L \cap L_o$.

Пересекая в трехмерном пространстве поверхность облака плоскостью, параллельной поверхности Земли, получаем множество точек, описывающих границу облака, размерность которой $D = 2 - H$. Экспериментальные наблюдения с помощью радиолокаторов позволяют оценить $H \approx 0.6$ для облаков и зон дождя.

Атмосфера стратифицирована, а это означает, что вертикальное направление неравноправно с горизонтальным, следовательно, облака не могут быть самоподобны, а, скорее, они самоаффинны. Облака являются примером мультифрактальности.

Мультифрактальная конвекция. Эксперименты, проведенные с изменением устойчивости конвективных валов в ячейке с изменяющимися параметрами, показали, что при увеличении температуры, валы теряли устойчивость и начинали совершать поперечные колебания с частотой, близкой к частоте Ω , численно равной иррациональному числу (золотому сечению) $\Omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. Обоснование такого выбора дает теория динамических систем.

Флуктуация колебаний конвективных валов, оказавшихся в состоянии неустойчивости, приводит к образованию странного аттрактора в фазовом пространстве для движений этой системы. Пространственно-временной анализ кривой аттрактора позволил получить численное множество и его меру $M_d(q, \delta)$:

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^d \Sigma(m_t(\delta))^{1-q}. \quad (\text{П4.24})$$

Здесь δ - минимальный размер между отсчетами на кривой аттрактора ("ребро гиперкуба"), m_t - число точек в ячейке. Критическая размерность определяется по графику соотношения: $\Sigma(m_t(\delta))^{(1-q)} \sim \delta^{-\tau(d)}$, построенному в log-log координатах.

Для тепловой конвекции строится кривая $f(\alpha)$ фрактальной размерности, по формулам:

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= -d/dq[\tau(q)], \\ f[\alpha(q)] &= q \alpha(q) + \tau(q) \end{aligned} \quad (\text{П4.25})$$

Эти два уравнения задают параметрическое представление кривой $f(\alpha)$ - фрактальной размерности кривой отображения окружности на себя с числом вращения, равным золотому сечению. Неустойчивая тепловая конвекция и критическое отображение окружности на себя обладают одинаковой фрактальной структурой и поэтому принадлежат к одному и тому же классу универсальности.

Волновые процессы во фрактальных структурах. Эти процессы условно делятся на два типа (Зосимов, Лямшев, 1995). Во-первых, - распространение волн во фрактальных структурах, когда фрактал является средой распространения и, во-вторых, рассеяние и излучение волн фрактальными структурами, когда волны распространяются в однородной среде с погруженными в неё фрактальными неоднородностями.

5. Идеи Тсаллиса.

В 1988 бразильским ученым Константино Тсаллисом была предпринята очень нетривиальная попытка, расширить область применения термодинамики и статистической механики (Tsallis, 1988). Поначалу она казалась лишь неким математическим трюком, но затем предложение Тсаллиса начало находить применение во многих физических и

геофизических задачах, в задачах, которые касались термодинамически аномальных систем.

Обычная термодинамика: Пусть у нас есть макроскопический "кусоч" какого-то вещества, например, капля воды. Нам известны такие его непосредственно измеряемые параметры, как объем, количество вещества и внутренняя энергия. Однако ничего о том, как энергия распределена по объему, мы сказать не можем.

В принципе, существует огромное количество возможностей распределить энергию по всему объему. Однако из опыта мы знаем, что практически все системы вокруг нас, если их изолировать от внешнего воздействия, рано или поздно приходят в определенное, вполне конкретное состояние, которое мы называем состоянием равновесия. Отсюда возникает вопрос: как научиться предсказывать распределение энергии, вещества и т.д. в состоянии равновесия?

На этот вопрос и отвечает термодинамика посредством введения понятия энтропии.

Если не указывать конкретную функциональную зависимость энтропии от энергии, объема и количества вещества, то отсюда мало что можно получить. Однако если предположить, что энтропия является экстенсивной величиной, то сразу возникает целый ряд нетривиальных и полезных утверждений. Экстенсивная величина - это такая характеристика системы, которая растет с увеличением размеров системы. Более строгое определение: если наша система состоит из двух *независимых* подсистем А и В, то энтропию всей системы можно получить сложением энтропий подсистем:

$$S(A+B) = S(A) + S(B)$$

Именно это свойство и означает экстенсивность (аддитивность) энтропии.

В статистической физике энтропия уже трактуется через число микросостояний системы. Стараясь, тем не менее, определить энтропию так, чтобы она оставалась экстенсивной величиной, статистическая физика (а точнее, кинетика) вынуждена привлекать недоказуемую гипотезу молекулярного хаоса. Эта гипотеза состоит в том, что любые сталкивающиеся молекулы были *до столкновения* никак не скоррелированы, то есть, никак не чувствовали друг друга. Для многих (но не для всех!) систем это, конечно, вполне здравая аксиома. И именно из нее следует знаменитое выражение для энтропии для замкнутой системы (выгравированное, кстати, на надгробной плите Больцмана):

$$S = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$$

Здесь i — это номер микросостояния системы, p_i — это вероятность нахождения системы в этом микросостоянии, \sum_i означает суммирование по всем таким микросостояниям, а k — это константа Больцмана, которую мы в дальнейшем положим равной единице. В статистической физике показывается, что так определенная энтропия, в самом деле, является аддитивной величиной и принимает максимальное значение в состоянии равновесия. То есть, она подходит на роль той "непонятной" энтропии, которая аксиоматически появилась в феноменологической термодинамике.

Термодинамика "обычных" систем. Термодинамика построена по Больцману. Все бы хорошо, только возникает вопрос: а насколько весь этот метод универсален? Годится ли он для всех возможных макроскопических систем?

Для того чтобы ответить на него, давайте взглянем еще раз на свойство аддитивности энтропии. Это свойство строго выполняется для независимых подсистем, а в реальности - части одной системы всегда взаимодействуют друг с другом. Будет ли это приводить к нарушению аддитивности? Если да, то насколько важны эти неаддитивные добавки?

Здесь начинаются нетривиальные вещи. Действительно, взаимодействие между частями системы есть практически всегда. Но только насколько оно важно для макроскопических систем? Давайте разберемся. Возьмем две капли воды и объединим их

вместе. Благодаря тому, что площадь свободной поверхности воды при этом уменьшится, некоторая часть энергии поверхностного натяжения (что есть ничто иное, как взаимодействие между молекулами) выделится и перейдет в тепло. Однако насколько эта энергия важна для термического состояния системы? Сделаем численную оценку, для слияния двух капель диаметром 1 см при температуре 300 К. Выделившаяся поверхностная энергия равна 36 мкДж. Так как теплоемкость образовавшейся капли равна 35 Дж/К, то выделившаяся энергия приведет к нагреву капли на 1 мкК, что составляет $0,3 \cdot 10^{-8}$ от начальной температуры. Полученная величина $\sim 10^{-8}$ служит показателем того, с какой точностью сохраняется свойство термодинамической аддитивности (в том числе, и аддитивность энтропии) в нашем примере.

Выясним, почему энергия поверхностного натяжения так мала по сравнению с тепловой энергией? Ответ прост: тепловая энергия запасена *во всех молекулах вещества*, а поверхностная энергия, очевидно, только *в приповерхностных молекулах*. И полученное нами сильное различие энергий происходит просто из-за того, что доля приповерхностных молекул очень мала в макроскопических системах. Нетрудно оценить, что точность, с которой сохраняется аддитивность, приблизительно равна размеру атома, деленному на размер системы. Отсюда, кстати, можно было бы сразу получить характерную оценку $\sim 10^{-8}$ для нашей задачи, не делая никаких вычислений.

Остался последний шаг для полного понимания, почему в большинстве систем энтропия аддитивна с очень хорошей точностью. Зачем в предыдущем абзаце мы подсчитывали число приповерхностных атомов? Да потому что межмолекулярные силы по природе своей *короткодействующие*. Каждая молекула эффективно чувствует лишь несколько своих ближайших соседей. Поэтому те молекулы, которые находятся уже на глубине в несколько атомных радиусов, попросту "не знают" о существовании свободной поверхности, а значит, и не вносят свой вклад в энергию поверхностного натяжения.

В большинстве систем силы между частями системы короткодействующие: каждая молекула чувствует лишь несколько ближайших соседей. Именно отсюда следует то, что термодинамика таких макроскопических систем — экстенсивна. Именно такие системы окружают нас в повседневной жизни, и потому мы будем называть такие системы обычными.

Что такое термодинамически аномальные системы? В предыдущем утверждении на самом деле спрятано некое "а может быть...". В самом деле, а могут ли существовать "необычные" системы? То есть, как мы уже понимаем, это можно перефразировать так: существуют системы с *дальнодействующим взаимодействием*? Оказывается, да.

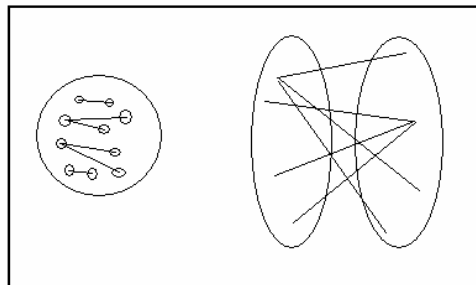


Рис. П4-5. Взаимодействие между разными частями системы: слева – близкодействие в случае капли воды, справа – дальнодействие гравитационных сил.

Примером такой системы может являться холодное облако межзвездной пыли достаточно больших размеров. Как мы знаем, сила гравитационного притяжения между любыми телами падает с расстоянием достаточно медленно, обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому в самогравитирующих системах каждая

частица чувствует не несколько ближайших соседей, а всю систему целиком, все другие частицы. И теперь, если мы мысленно разобьем облако на две части, то эти части будут взаимодействовать не по границе соприкосновения, а полностью всеми объемами.

Эта ситуация проиллюстрирована на рисунке 16-5. Слева показано, как взаимодействуют две части капельки воды; справа — как взаимодействуют две части пылевого облака. Видно, что во втором случае *две гравитирующие системы, помещенные рядом, никогда не могут быть независимыми*. Таким образом, в гравитирующих системах очень сильно нарушается термодинамическая аддитивность: такую систему нельзя разбить на приблизительно независимые подсистемы. Энтропия в таких системах не будет экстенсивной величиной. Такие системы не могут быть описаны обычной, больцмановской термодинамикой.

Оказывается, это еще не все. Существуют и другие системы, которые не могут быть описаны больцмановской термодинамикой. Только причина такого "неповиновения" может быть разной. Это могут быть, например, "эффекты памяти", когда система в некотором смысле помнит свое прошлое. То же самое более аккуратно словами: когда эволюция системы в данный момент времени зависит не только от параметров системы в этот конкретный момент времени, но и от ее параметров некоторое время назад.

Эффекты памяти могут легко привести к нарушению гипотезы молекулярного хаоса. Действительно, они могут означать, что отдельные частицы перед столкновением "помнят" друг друга, их движение не является полностью нескоррелированным. А как мы помним, предположение молекулярного хаоса лежит в основе больцмановского выражения для энтропии. Значит, это выражение не годится для систем с памятью.

Есть и иные системы, в которых то или иное утверждение, приводившее к эффектам памяти, нарушается. Перечислять все типы таких систем нет смысла. Главный вывод для нас состоит в следующем утверждении.

Существуют системы, в которых есть сильные корреляции, сильное взаимодействие между всеми частями системы. Это приводит к нарушению термодинамической аддитивности системы, потому их не удастся описать больцмановской статистикой и термодинамикой. Значит, необходим иной подход, который каким-либо образом сумел бы справиться с режимом сильной связи между всеми частицами системы.

Режим сильной связи в конденсированном веществе. Возникшая ситуация, на самом деле, не нова. Физика уже сталкивалась с системами, в которых взаимодействие между частицами настолько важно, что оно полностью меняет картину поведения вещества. И, несмотря на то, что в общем случае теоретическая физика пока бессильна описать произвольную систему в режиме сильной связи, в некоторых конкретных случаях решение все-таки было найдено.

Самый известный случай — это, пожалуй, квазичастицы. Рассмотрим обыкновенный идеальный кристалл. В нем атомы или ионы расположены в строгом порядке, в узлах некой кристаллической решетки. Взаимодействие между соседними атомами настолько значительно, что если мы как-нибудь заставим один атом колебаться, то это моментально приведет к колебанию его соседей, затем более удаленных атомов и так далее. В результате мы получаем, что описывать "жизнь" кристалла на языке колебаний отдельных атомов крайне неудобно: мы не можем заставить один атом колебаться, а другой - нет. Другими словами, отдельные атомы - это не есть настоящие степени свободы "жизни" кристалла.

Как же справиться с этой проблемой? Какое описание наиболее удобно для работы с кристаллом? Оказывается, благодаря высокой симметрии кристалла "жизнь" кристалла можно описать на совершенно ином языке - на языке особых квазичастиц: фононов.

Дело в том, что если мы начинаем колебать один атом, то все атомы тоже рано или поздно начинают колебаться, причем не произвольно, а совершенно определенным способом —

синхронно. То есть, вместо того, чтобы говорить "мы заставили все атомы колебаться по такому-то сложному закону", можно сказать: "мы возбудили в кристалле одно единственное синхронное колебание, один фонон". Оба утверждения эквивалентны, в них содержится одна и та же информация, но второе утверждение намного проще. В результате оказывается, что многие задачи, которые теоретически "не пробивались" на языке колебаний отдельных атомов, относительно легко решаются на языке фононов.

Итог: в нашем конкретном примере мы взглянули на проблему совершенно с другой стороны: вместо сложной задачи о колебании связанных друг с другом атомов мы получили более простую задачу о практически невзаимодействующих фононах:

отдельные атомы + сильное взаимодействие => практически свободные фононы.

К сожалению, введение квазичастиц типа фононов полезно только в том случае, когда атомы образуют некое подобие кристалла. В случае же нашего гравитирующего облака никакого кристалла нет, и значит, фононы нам не помогут. Но тогда возникает предположение: а может быть, с задачей можно справиться, если как-то совершенно по-другому взглянуть на проблему?

Идея Тсаллиса. Попытка такого пересмотра содержится в термодинамике Тсаллиса. Подход базируется на одной смелой идее, на одной гипотезе:

вполне возможно, что сильное взаимодействие в термодинамически аномальных системах настолько меняет картину, что приводит к совершенно новым степеням свободы, к совершенно иной статистической физике небольшого типа:

отдельные частицы с бoльцмановской статистикой + сильное взаимодействие => новые степени свободы с бoльцмановской статистикой + отсутствие взаимодействия.

Эта гипотеза не доказана. Более того, совершенно непонятно, что это за новые степени свободы. Нет ни одного примера, когда этот переход был бы явно наблюден, доказан. Поэтому это утверждение остается пока лишь гипотезой. Но с другой стороны, физическая интуиция подсказывает, что такой переход в том или ином виде, в самом деле, может иметь место. Поэтому в таких случаях физик на время оставляет попытки строго доказать этот переход и вместо этого пытается понять, к чему это может привести.

Если почти ничего неизвестно про эти новые степени свободы, то, как же тогда можно получить что-то конструктивное? Тсаллис предложил следующее. Наша единственная зацепка заключается в том, что статистика будет бoльцмановская. Это значит, что выражение для энтропии будет уже иное. Надо придумать какую-нибудь формулу для энтропии, которая, во-первых, переходила бы в стандартную формулу в пределе слабой связи, а во-вторых, смогла бы описать неэкстенсивные системы.

Тсаллис взял стандартное выражение для энтропии, и вместо логарифма ввел новую функцию - степенную:

$$\ln(x) \rightarrow \ln_q(x) = (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$$

с неким числовым параметром q . При q , стремящемся к 1, $\ln_q(x)$ переходит в обычный логарифм, в чем можно убедиться простым дифференцированием. Новая формула для q -энтропии выглядит так:

$$S_q = - \sum_i (p_i^q \ln_q(p_i)) = (1 - \sum_i p_i^q)/(q - 1).$$

Если $q > 1$, то q -энтропия переходит в стандартную бoльцмановскую энтропию.

Главное следствие такой замены: q -энтропия является уже не экстенсивной функцией. Если всю систему разбить на две независимых подсистемы А и В (напомним, что мы уже перешли к новым *невзаимодействующим*, а значит, и *независимым* степеням свободы), то мы получим:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$$

Итак, параметр q - это мера неэкстенсивности системы. Как видно, величина q пока ничем не ограничена и может принимать значения: $-\infty \div +\infty$, однако некоторые ограничения могут возникнуть в той или иной конкретной задаче.

Может возникнуть резонный вопрос: ну хорошо, построили мы новую энтропию. Но откуда мы знаем, что эта энтропия обладает свойством увеличиваться при эволюции системы? Ведь, казалось бы, кинетическое уравнение Больцмана однозначно говорит, что неубывающей функцией является именно стандартное, больцмановское выражение для энтропии. Ответ на этот вопрос прост: кинетическое уравнение Больцмана не универсально, а базируется на гипотезе молекулярного хаоса. Если же эта гипотеза нарушается, то нарушится и закон не убывания больцмановской энтропии. Более того, удастся показать, что гипотезу молекулярного хаоса можно видоизменить таким способом, чтобы неубывающей функцией оказалась именно q -энтропия. Таким образом, предложение Тсаллиса влечет за собой не только обобщение термодинамики и статистической физики, но и обобщение физической кинетики. Однако надо четко понимать, что это — не есть вывод термостатистики Тсаллиса, не есть доказательство того, что форма энтропии должна быть именно такая. Опять же, это лишь игра с формулами, исследование того, что *в принципе* может быть реализовано в природе.

Крайне важно понимать, что выбранная функциональная форма q -энтропии достаточно произвольна. Ее самый главный плюс: она может промоделировать неэкстенсивность. Однако доказательства того, что именно такая форма и должна возникать, нет.

Тсаллис предложил некоторое обобщение термодинамического подхода. Действительно, обычная термодинамика получается из нашего общего подхода при вполне конкретном значении параметра $q = 1$. Если же q отлично от 1, то мы имеем уже иную теорию, со своими законами, которые нам еще предстоит исследовать. Таким образом, мы построили целый класс различных термодинамик! И теперь наша задача — понять, каким физическим системам будет соответствовать та или иная термодинамика.

Развитие теории. Итак, имеется новое выражение для энтропии. На основе его мы теперь можем строить здание новой статистической физики. Прежде, следует упомянуть здесь два интересных явления, возникающих в термостатистике Тсаллиса. Первое — это последствия перехода от логарифмической к степенной функции. Если рассмотреть в рамках новой теории канонический ансамбль и получить, скажем, распределение частиц по энергии, то вместо известного распределения Гиббса:

$$p(E) \sim \exp(-E/kT)$$

мы получим:

$$p(E) \sim [1 + (1 - q) * (-E/kT)]^{q/(1-q)}$$

Самым важным здесь является поведение этого распределения при больших значениях энергии. При $q > 1$ мы имеем *степенное*, а не экспоненциальное падение с ростом энергии, а при $q < 1$ мы получаем, что существует максимально возможная энергия, то есть, распределение обрезается на некотором значении E . Все три типа кривых ($q < 1$, $q = 1$, $q > 1$) схематически показаны на рис. П4-6-а.

Второе явление, более экзотическое, но, тем не менее, очень интересное. При переходе от статистической физики к термодинамике обычно используется термодинамический предел: количество частиц стремится к бесконечности и время, прошедшее между "приготовлением" системы и наблюдением за ней, стремится к бесконечности (для того, чтобы избавиться от зависимости от начальных условий). В случае обычной термодинамики было неважным, какой из этих двух пределов брать первым. Теперь же, в случае термодинамики Тсаллиса эти два предела могут отвечать различным физическим ситуациям (рис. П4-6-б).

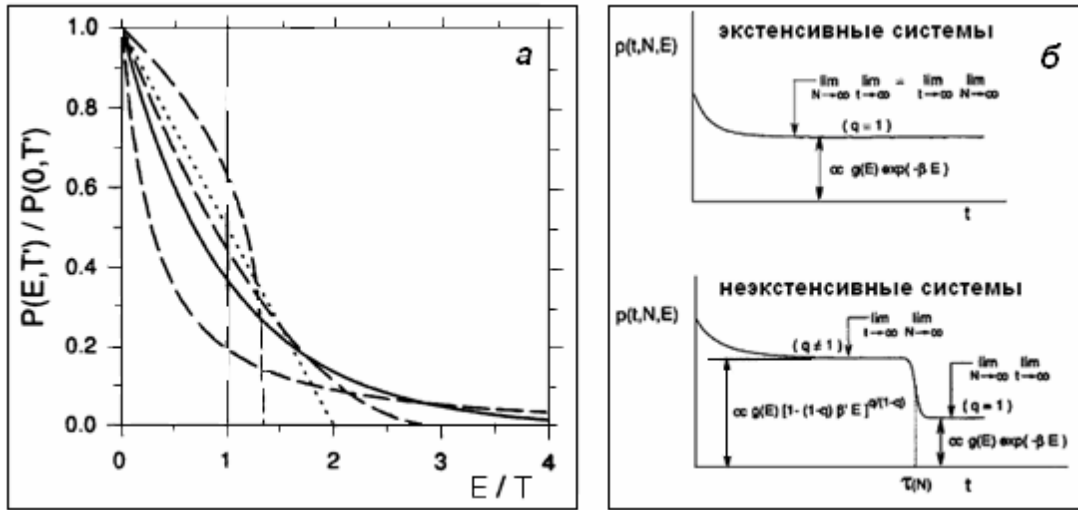


Рис. П4-6. Распределение частиц по энергии в термостатистике Тсаллиса (а). Эволюция системы с памятью во времени. На нижнем рисунке количество частиц, большее, нежели на верхнем (б).

Итак, рассмотрим некую термодинамически аномальную систему и проследим, как меняется во времени некая характеристика этой системы. В первые моменты после приготовления система эволюционировала, пока не пришла в некое термодинамически метастабильное состояние. Через некоторое достаточно большое время система, наконец, "сваливается" в стабильное состояние.

В силу некоторых причин (см. ниже) время "удержания" системы в метастабильном состоянии может расти с увеличением числа частиц в системе. Это показано на рис. П4-6-б: видно, что на нижнем графике число частиц больше, чем на верхнем, и значит, время жизни метастабильного состояния также больше.

Что отсюда следует? Если мы держим число частиц конечным, и стремим время наблюдения к бесконечности, мы движемся по одному из графиков вдоль оси времени (горизонтальная стрелка на рисунке). Для любого конечного N мы в пределе больших времен получаем стабильное состояние. Если же мы зафиксируем время наблюдения, и будем неограниченно увеличивать число частиц, мы будем двигаться вниз по рисунку, и для любого конечного времени мы получим, в конце концов, метастабильное состояние. Если же мы имеем дело с реальной системой - то есть, количество частиц и время велики, но конечны, то могут реализоваться обе ситуации. Отсюда следует нетривиальный вывод: *В рамках термостатистики Тсаллиса, даже для одной и той же физической системы мы можем получить совершенно разные термодинамические картины!*

И теперь несколько слов о том, как в системе может возникнуть большой масштаб времени. Возможностей здесь, по-видимому, может быть несколько, но одна из них такова. Взаимодействие между частицами может обладать такими свойствами, что после приготовления системы частицы начинают не хаотично двигаться по всему доступному фазовому объему, а "крутятся" около некоторых метастабильных траекторий (нечто типа аттрактора). Это, кстати, будет одним из примеров системы с памятью. Для того чтобы частицы "вылетели" из этой западни и начали блуждать по всему фазовому пространству (для того, чтобы система термализовалась), требуется некоторое значительное время, которое вполне можно представить зависящим от числа частиц. И в то время, пока частицы блуждают по своему ограниченному подпространству, вся система целиком и находится в метастабильном состоянии.

Что же есть в реальном мире? Как же нам искать системы, описываемые той или иной неэкстенсивной термодинамикой? Прежде всего, сразу же можно попытаться

применить термостатистику Тсаллиса к тем системам, в которых мы уже подозревали неэкстенсивность (наш пример — облако самогравитирующего газа). Например, есть проблема с распределением по скоростям спиральных галактик в скоплениях, а именно, экспериментальные данные указывают на то, что это распределение резко обрывается на значении ~ 500 км/сек. Подход, основанный на термостатистике Тсаллиса, дал намного лучшее описание распределения по скоростям галактик, нежели все предыдущие попытки.

Другой пример систем, в которых можно заранее подозревать неэкстенсивность, является плазма, где были исследованы продольные (электростатические) волны в бесстолкновительной плазме в рамках термостатистики Тсаллиса. Идея ее применения к плазменным волнам базируется на двух основных аргументах. Во-первых, кулоновское взаимодействие — это все-таки дальнедействующие силы, и потому могут приводить к неэкстенсивности плазмы. Кроме того, существуют и экспериментальные указания на то, что распределение ионов по скоростям в плазме отлично от максвелловского. Развита теория электростатических плазменных волн в рамках термостатистики Тсаллиса и сделан ряд предсказаний, отличных от стандартных, которые можно было бы непосредственно проверить на опыте. Это касается, в частности, коэффициента затухания Ландау, а именно, его зависимости от длины волны.

Кроме этого, была предпринята попытка, привлечь термостатистику Тсаллиса к описанию развитой турбулентности. Рассматривались две точки, разделенные неким расстоянием r , и будем измерять относительную скорость u жидкости в этих точках. Поскольку мы имеем дело с турбулентностью, то, делая измерения в разных местах жидкости, мы будем получать различные значения u . Таким образом, у нас получится некое распределение по скорости u . Экспериментальный факт: это распределение имеет не максвелловский вид, а спадает при больших u , по степенному закону.

Применение термостатистики Тсаллиса к этому распределению оказалось успешным. Авторы этой работы смогли даже дать интерпретацию параметру q и получили формулу, дающую значение q как функцию расстояния r . Предсказания хорошо согласуются с экспериментом, что позволяет надеяться, что мы, используя новую обобщенную статистику, в самом деле "ухватили" что-то важное в физике турбулентности.

Наконец, термостатистика Тсаллиса находит свое применение и при изучении эволюции так называемых *сложных сетей*. Сложная сеть — это система, состоящая из большого числа узлов, которые могут определенным образом взаимодействовать друг с другом. Сюда относятся многие социальные сообщества (например, фондовые биржи), компьютерные сети (Интернет) и т.д. Во всех этих случаях есть важное явление "дальнего действия" — каждый узел сети может взаимодействовать не только с несколькими ближайшими соседями, но и со многими удаленными узлами, число которых, к тому же, может меняться со временем. Применение термостатистики Тсаллиса и здесь выглядит вполне оправданным.

6. Примеры фрактальности и самоорганизации параметров Земли.

Явления самоорганизации происходят в природе повсеместно. Например, кусок горной породы сжимается на гидравлическом прессе. В нем по всему объему ($D = 3$) образуются трещины, которые, раскрываясь, генерируют акустические импульсы, регистрируемые аппаратурой. По мере увеличения нагрузки, трещины, за счет взаимодействия друг с другом, стягиваются к плоскости Кулона-Мора ($D = 2$), по которой, в дальнейшем, произойдет разрушение образца. Вероятно, самоорганизацию в Природе можно считать одним из законов ФЗ.

Фрактальная Пангея.

На поверхности «далекой планеты», изображенной на рис. 16-7, показаны очертания воображаемой фрактальной Пангеи (Мандельброт, 2002). Картина получена

посредством компьютерной реализации случайной поверхности броуновской функции из точек на сфере. Уровень океана был выбран таким образом, чтобы три четверти общей площади оказались под водой. Береговая линия получена интерполяцией. Размерность D береговой линии модельной Пангеи составляет $3/2$, в то время как гипотетические рисунки в учебниках геологии приписывают реальной Пангее то же значение D , что наблюдается в очертаниях современных континентов, т.е. $D \approx 1.2$.



Рис. П4-7. Фрактальная Пангея Мандельброта (2002).

Фрактальность инверсий и экскурсов геомагнитного поля.

Информация о периодах инверсий неоднократно привлекала внимание исследователей, которых интересовал, в частности, такой вопрос: можно ли сказать что-либо определенное о характере эволюции Земли? Например, развивалась Земля случайным образом, или в природе ее эволюции заложены какие-то принципы? Надо сказать, что анализ данных по инверсиям (Харланд и др., 1985) приводил авторов к различным выводам: от полного отрицания каких-либо закономерностей, до выделения четкой периодичности. В течение последних примерно 80 млн. лет инверсии на Земле случались в среднем примерно 2-3 раза в миллион лет. В течение предыдущих 40 млн. лет (120 – 80) инверсий не было вовсе, а во время предыдущих 40 (от 160 до 120 млн. лет назад) - характер инверсий был примерно тот же, что и в течение последних 80 млн. лет (см. рис. П4-8-а). Период 120 - 80 млн. лет назад, в течение которого инверсий вообще не было, получил название меловой суперхрон. По некоторым данным, ещё ранее 160 млн. лет тому назад, тоже происходил суперхрон - юрский, еще раньше (250-300) - карбонский и т.п. В истории магнитного поля Земли суперхроны случались довольно регулярно, они перемежались периодами частых инверсий. Замечено, что длительность периодов суперхронов со временем постепенно увеличивалась таким образом, что последний из них был самым длинным.

На рис. П4-8-а изображен ряд инверсий (I) геомагнитного поля, случившихся за время последних 160 млн. лет (Харланд и др., 1985). Ниже, на этом рисунке, приведена оценка клеточной фрактальной размерности ряда периодов времени между инверсиями, полученная методом покрытий (Федер, 1991). Она выражается зависимостью: $N(\delta) = \alpha \delta^D$, здесь δ - имеет смысл длительности периода (dT) между инверсиями, $\alpha \sim p(t)$ вероятность того, что произвольно выбранный интервал будет иметь продолжительность t , величина фрактальной размерности $D = 1,59$, а $N(\delta)$ означает число интервалов. Зависимости подобного типа принято считать скейлинговыми соотношениями. В нашем случае, это выражение характеризует масштабную инвариантность процесса для продолжительностей интервалов одинаковой полярности поля (Иванов, 1996; Федер, 1991). Полученная зависимость показывает, что количество интервалов, например, длительностью в 10 млн.

лет в три раза больше, чем периодов в 20 млн. лет и т.п. Это соотношение справедливо для периодов, больших одного млн. лет (Иванов, 1996).

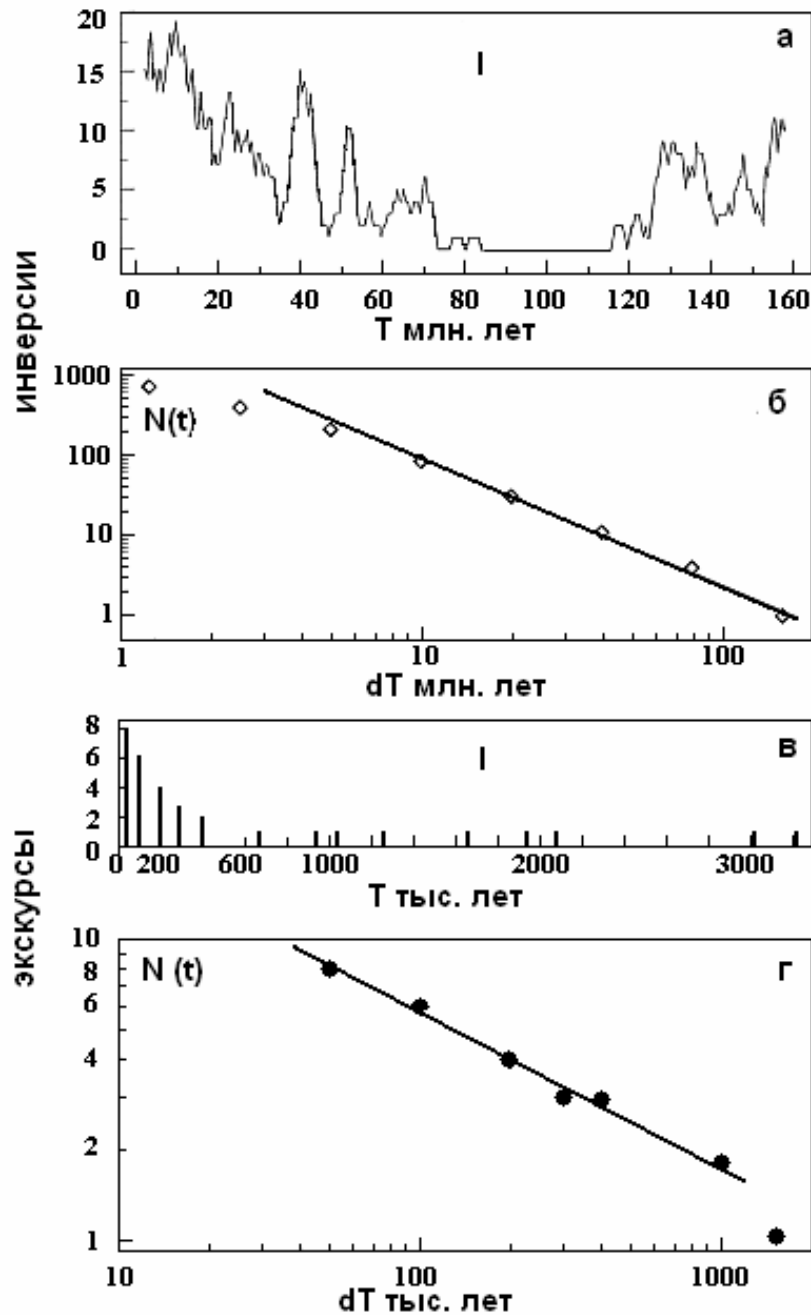


Рис. П4- 8. Распределение количества инверсий I , произошедших в течение трех млн. лет, за $T = 160$ млн. лет эволюции геомагнитного поля (Харланд, 1985) - (а); б - оценка величины клеточной фрактальной размерности ($D = \lg N(t) / \lg dT$); Количество экскурсов I в течение 3 млн. лет - в; клеточная фрактальная размерность экскурсов - г.

Аналогичным образом исследована последовательность экскурсов, Как оказалось, - обе последовательности: фрактальны, идентичны и обладают скейлингом (при изменении временного масштаба на два порядка характер зависимостей не меняется). Полученный результат свидетельствует, что геомагнитное поле фрактально на различных временах. Это означает, что в области генерации поля происходят процессы самоорганизации различного временного масштаба, что необходимо учитывать при построении модели генерации геомагнитного поля.

Фрактальность землетрясений, извержений вулканов и энергии излучения звезд.

При раскрытии трещины излучается звуковой импульс акустической эмиссии (АЭ). Этот импульс “несет” определенную долю энергии и, взаимодействуя с дилатоном (микротрещиной), передает ему энергию, “помогая” раскрыться. Трещина начинает расти и излучает при этом “свой” импульс, который взаимодействует со следующей трещиной и т.д. При этом может наблюдаться эффект лавинного образования трещин, звуковые импульсы которых когерентно складываются, обеспечивая при этом явление усиления звуковой волны (Ishido, Nishizawa, 1984) и возникновение фрактальных структур (рис. П4-9).

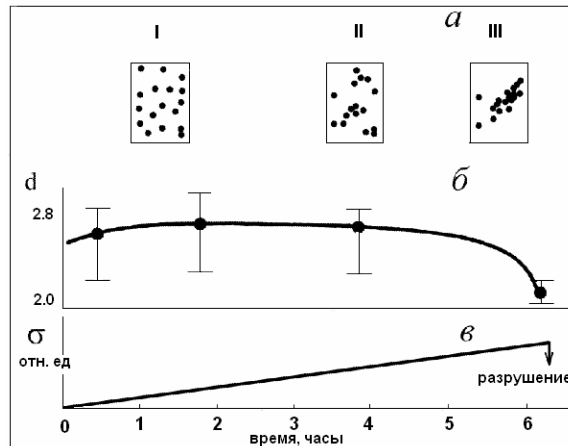


Рис. П4-9. *а* - Распределение гипоцентров акустической эмиссии по мере увеличения сжатия образцов гранита и возникновения фрактальных структур. *б* - изменение фрактальной размерности *d*. *в* - нагрузка образца до его разрушения (Lei et al., 1992).

В качестве примера природного фликкер-шума, обычно приводят известный закон повторяемости землетрясений и извержений вулканов. Похожий закон характеризует, например, зависимость полной энергии излучения вспышек на звездах, в том числе и на Солнце (рис. П4-10), аналогичные зависимости характерны для спектров галактических космических лучей и т.п. По-видимому, первыми, кто обратил внимание на этот закон, были египтяне, которые обнаружили, что интенсивность разливов Нила, - обратно пропорциональна их частоте. Всё это говорит об универсальности в Природе такого явления, как фликкер-шум.

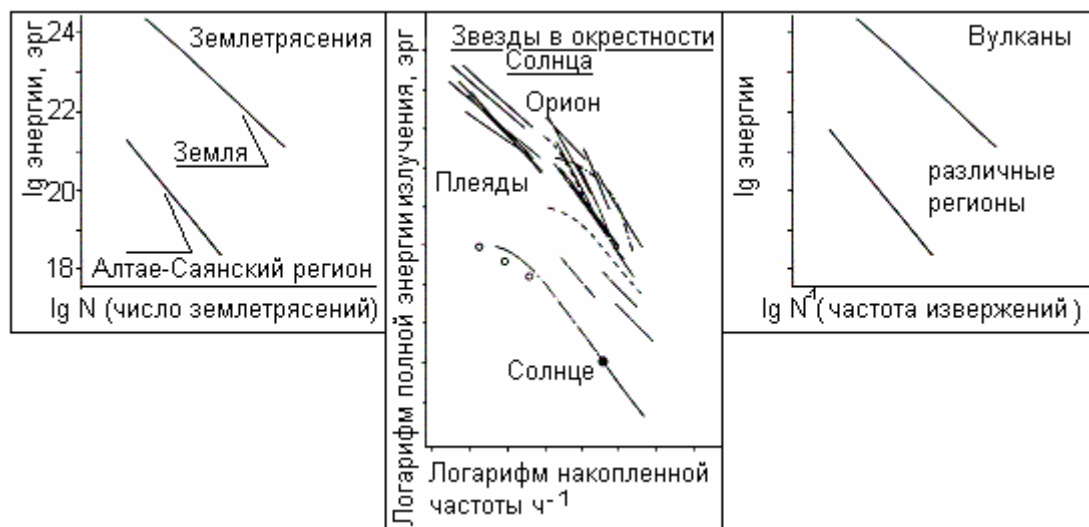


Рис. П4-10. Повторяемость землетрясений, энергетические спектры вспышек, частота извержений вулканов (Кузнецов, 1992).

Фрактальность климата.

Выясним, можно ли считать климат фрактальным и, соответственно, структуру, образующую климат на Земле, - открытой самоорганизующейся структурой? Основания к положительному ответу на этот вопрос, конечно, есть. Начнем с того, что пилообразный характер вариации температуры говорит о том, что такая возможность имеет место. Приведем пример, где зависимость, полученная при наблюдении за высотой падения оползня в течение 20 тыс. лет наблюдений (Hergarten, Neugebauer, 1998), внешне очень похожа на график, приведенный на верхней панели рис. П4-11. В этой работе авторы утверждают, что для объяснения характера движения оползней с проскальзыванием можно эффективно использовать идею самоорганизованной критичности, впервые высказанную в работе (Bak et al, 1987).

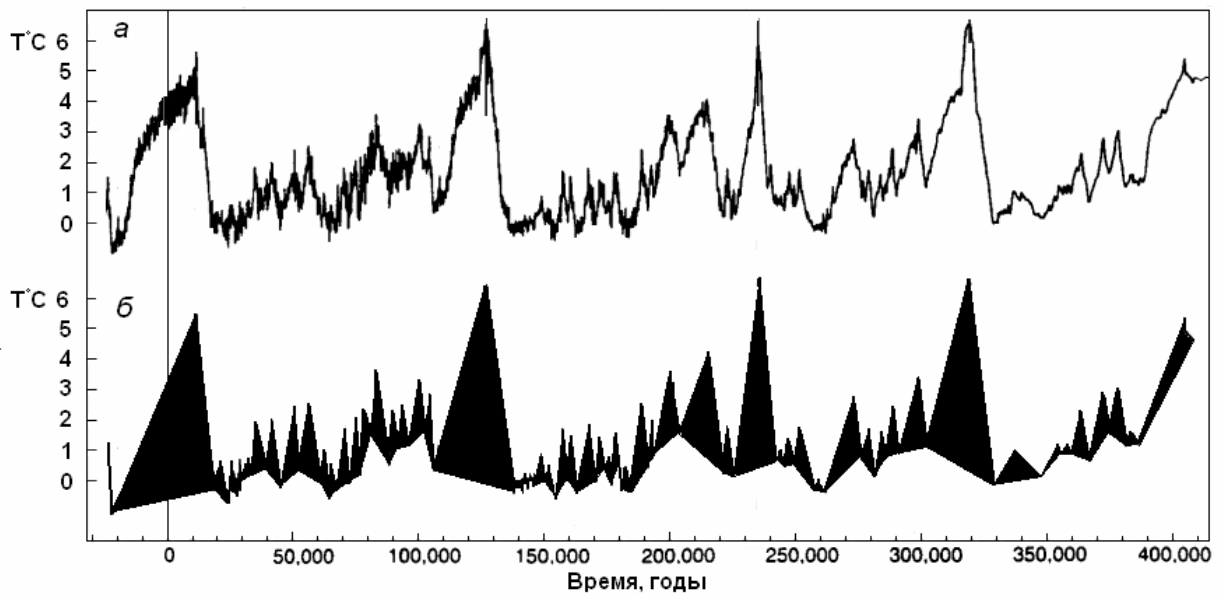


Рис. П4-11. Вариация температуры в течение 400 тыс. лет. Верхняя панель – по данным (Petit et. Al., 1999; Vimeux et al., 2002), нижняя – эта же кривая после преобразования.

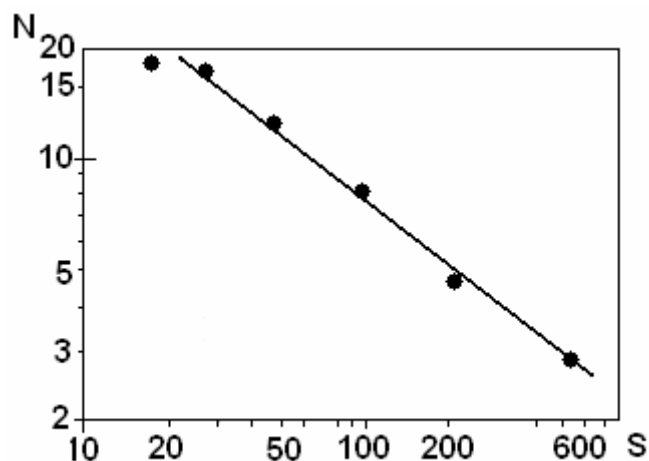


Рис. П4-12. График $\lg N - \lg S$, где S – «пик» повышения температуры (в отн. ед.), N – число пиков в интервале величин S . В течение 400 тыс. лет выделено 45 «пиков».

На нижней панели рис. П4-11 приведен график $T(t)$, преобразованный таким образом, чтобы пик температуры можно было бы выразить как площадь затемненного

треугольника S . Подсчитав количество пиков данной площади N , построим график: $\lg N - \lg S$. Как и предполагалось, этот график можно аппроксимировать линией, наклон которой к горизонту определяет фрактальную размерность климата (рис. П4-12). Наличие подобной зависимости, как принято считать, характеризует систему, способную к самоорганизации. Отсюда следует фундаментальный вывод о том, что климат может быть фрактальным, по крайней мере, в течение последних 400 тыс. лет.

Анализируя далеко не полный перечень примеров фрактальности Земли, - приходим к выводу о том, что Земля, это открытая самоорганизующаяся структура, в которой происходят диссипативные процессы, приводящие, в конечном счете, к уменьшению фрактальной размерности, иначе, к минимизации таких параметров как гравитационный потенциал планеты,

Литература

- Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы в волновых процессах. УФН. 1995. Т. 165. № 4. С. 361-402.
- Иванов С.С. Самоподобие последовательности инверсий геомагнитного поля. Геомагнетизм и Аэрономия. 1993. Т. 33. № 5. С. 181-186.
- Иванов С.С. Мультифрактальные свойства и размерность аттрактора обращений геомагнитного поля. Геомагнетизм и Аэрономия. 1996. Т. 36. № 4. С. 149.
- Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. 2002, М.: ИКИ. 656 с.
- Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
- Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- Харланд У.Б., Кокс А.В., Ллевеллин П.Г. и др. Шкала геологического времени. М.: Мир. 1985. 188 с
- Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality. An explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. 1987. 59. P. 381-384.
- Christensen K. Replies. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. N. 8. P. 1289-1292
- Ding E.J., Lu Y.N. Analytical treatment for a spring-block model. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. N. 23. P. 3627-3630.
- Hergarten S., Neugebauer H.J. Self-organized criticality in landslide model // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25. No. 6. P. 801-804.
- Ishido T., Nishizawa O. Effect of zeta potential on microcrack growth in rock under relatively low uniaxial compression. J. Geophys. Res. 1984. V. 89. N. B6. P. 4153-4159.
- Klein W., Rundle J. Comment on "Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes". Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. N. 8. P. 1288.
- Lei X., Nishizawa O., Kusunose K., Satoh T. Fractal structure of the hypocenter distributions and focal mechanism solutions of acoustic emission in two granites of different grain sizes. J. Phys. Earth. 1992. V. 40. P. 617-634.
- Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman.: N.Y.1983. 272p.
- Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. N. 8. P. 1244-1247.
- Petit J. R., Jouzel J., Raynaud D., et al. Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica. Nature V. 399, P. 429-436, 1999.
- Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. J. Stat. Phys. 1988. V. 52. P. 479-487.
- Vimeux F., Cuffey K. M., Jouzel J. New insights into Southern hemisphere temperature changes from Vostok ice cores using deuterium excess correction. Earth Plan. Sci. Lett. V. 203, P. 829-843, 2002.